Trayectoria a Marte

J. E. Acosta[1] , L.M. Ramírez[2] y I.H. Jaramillo[3]

***Abstract*—Este trabajo fue realizado con la intención de ilustrar la trayectoria que describe una nave desde la tierra hasta Marte, debido a la variedad de trayectorias que puede describir la nave solo se trabajara con la nave siguiendo una trayectoria en forma elíptica, ilustrando igualmente la trayectoria de regreso. Este proyecto se inicio haciendo una investigación de las ecuaciones necesarias para hacer el montaje del sol y los planetas involucrados, en este caso la tierra y Marte, posteriormente se buscaron las ecuaciones para que la nave realizara la trayectoria entre los dos planetas. Después se realizo un montaje en matlab para simular la trayectoria que se describiría. Los resultados principales se pueden ver en el logro de la simulación de la nave que se dirige desde la tierra hasta marte y su regreso, su significado se ve cuando al aplicar las ecuaciones se ve la trayectoria en forma de elíptica que a partir de las ecuaciones se obtuvieron.**

***Palabras Claves*—Marte, Orbita Elíptica, Runge-Kutta, Tierra, Trayectoria.**

Abstract—**The main objective of this work is to show the trajectory that a slip from the Earth to Mars, due the many trajectories that the ship can describe, the ship will only travel following an elliptic trajectory, as much of going as of return. This project started with an investigation of the necessary equations to make the sun and the planets involved, in this case the earth and mars, later we looked for the equations that describe the trajectory that the ship would describe between the planets. Later we made a simulation in Matlab® implementing the equations that we found. The main results can be seen in the simulation of the ship that travels from earth to mars and its return, the meaning is seen when applying the equations you see the trajectory in an elliptic shape, obtained with the approximation of the equations.**

Key words - **Mars, Elliptical orbit, Runge-Kutta, Earth, Trajectory.**

I. NOMENCLATURA

Orbita: Trayectoria que recorre un cuerpo alrededor de otro bajo la influencia de alguna fuerza, según las leyes del movimiento planetaria de kepler, las orbitas son generalmente elípticas, aunque los planetas cercanos al sol tienen orbitas casi circulares.

Trayectoria elíptica: Se denomina orbita elíptica a de un astro que gira alrededor de otro describiendo una elipse, El astro central se sitúa en uno de los focos de la elipse. A este tipo pertenecen las órbitas de los planetas del Sistema Solar. En astrodinámica o mecánica celeste una órbita elíptica es aquella que tiene una excentricidad mayor que cero y menor que 1.

Leyes de Kepler: Describen el movimiento de los planetas en torno al sol, sin indagar de las causas que producen tal movimiento.

Leyes de Newton: Son tres leyes concernientes al movimiento de los cuerpos.

Unidades Astronómicas: Ua, Es una unidad de distancia que equivale a 149 597 870 691 ± 30 metros. Es aproximadamente igual a la distancia media entre la Tierra y el Sol, equivalente a 8,32 minutos luz. Aunque es una excelente aproximación, no corresponde con toda precisión a la órbita real de la tierra.

II. INTRODUCCION

EMPRENDER un viaje a otro planeta nunca se ha realizado; la hazaña espacial mas arriesgada fue la realizada por Neil Amstrong que se dirigió a la luna y fue el primero en pisarla, igualmente aunque es arriesgado podría ser posible y por esto la NASA se encuentra en las etapas iniciales de planificación para una misión tripulada al planeta rojo.

Una nave espacial puede pasar de una orbita a otra a través de una orbita semieliptica de transferencia en donde el motor proporciona a la nave dos impulsos de pequeña duración. El primero, para colocarla en la orbita de transferencia y el segundo, para situarla en la orbita circular de destino.

Un viaje tan largo y complejo requeriría de un procedimiento de dos fases. El primer paso consiste en despegar de la tierra y ubicarse en su orbita baja, aproximadamente a unos 380 Km. sobre la superficie terrestre. El segundo paso consiste en abandonar la orbita baja y emprender la ruta hacia Marte. Probablemente, la ISS servirá como plataforma de propulsión para la segunda fase del viaje.

Con esta simulación se pretende visualizar como seria el trayecto de la nave describiendo una trayectoria en forma elíptica, para acercar mas a la realidad como seria el viaje a otro planeta, la cantidad de días que tardaría y demás condiciones tales como la velocidad que debe tener la nave a lo largo de todo el trayecto. [1]

III. ¿PARA QUÉ LA SIMULACION?

La simulación se realiza con el fin de recrear lo que seria en realidad el viaje a marte, con las condiciones necesarias para que este sea factible, es decir, es un modelo a escala de lo que seria en realidad este viaje.

[1] Universidad Pontificia Bolivariana Sede Medellín. Ingeniería Electrónica, e-mail: jea_jea16@hotmail.com

[2] Universidad Pontificia Bolivariana Sede Medellín. Ingeniería Electrónica, e-mail: luisamariaramirez@hotmail.com

[3] Universidad Pontificia Bolivariana Sede Medellín. Ingeniería Electrónica, e-mail: ihjr4@yahoo.es

A. Modelo matemático de la tierra y marte

Para iniciar todo el montaje de la nave dirigiéndose a marte hay que tener en cuenta varios factores. Primero se debe tener el montaje de el sistema solar con la tierra y marte girando en sus orbitas alrededor de este ultimo, posterior a esto se realizara el montaje para la nave.
Como se puede observar en la figura 1., para facilidad se realizo un modelo de lo que seria la simulación para sacar las ecuaciones iniciales.

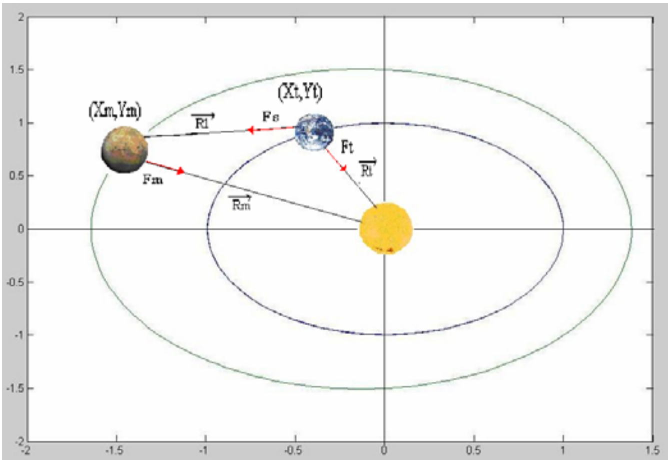

Figura 1. Sistema para la tierra y marte

Entonces a partir de la figura 1. :

La ecuación 1 muestra como se obtiene la fuerza ejercida entre la tierra y el sol, a su vez con la ecuación 2 se obtiene la fuerza ejercida entre marte y la tierra.

$$\left|\overline{Fgt}\right| = \frac{Gm_S m_T}{d^2} = \frac{Gm_S m_T}{\left|\overline{r_T}\right|^2} \qquad (1)$$

$$\overline{r_t} = (x_1, y_1)$$

$$\overline{r_{tm}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\left|\overline{Fgt}\right| = -\frac{Gm_s m_t}{\left|\overline{r_t}\right|^2} \cdot \frac{\overline{r_t}}{\left|\overline{r_t}\right|}$$

$$\sum F_t = -\frac{Gm_s m_t}{\left(x_1^2 + y_1^2\right)^{3/2}}(x_1, y_1) + \frac{Gm_t m_m}{\left|r_{tm}\right|^2} \cdot \frac{r_{tm}}{\left|r_{tm}\right|} = m_t \cdot \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2}, \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right)$$

Obteniendo así un vector de 4 filas

$$F(t,X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\left(\frac{Gm_s}{\left(x_a^2+y_a^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_m}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\right)(x_0) + \frac{Gm_m}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}(x_b) \\ y_1 \\ -\left(\frac{Gm_s}{\left(x_a^2+y_a^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_m}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\right)(y_0) + \frac{Gm_m}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}(y_b) \end{bmatrix}$$

Se realiza el mismo procedimiento para Marte, obteniendo así el siguiente vector de 4 posiciones:

$$F(t,X) = \begin{bmatrix} x_{1m} \\ -\left(\frac{Gm_s}{\left(x_b^2+y_b^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_t}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\right)\bullet(x_{0m}) + \frac{Gm_t}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\bullet(x_a) \\ y_{1m} \\ -\left(\frac{Gm_s}{\left(x_b^2+y_b^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_t}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\right)\bullet(y_{0m}) + \frac{Gm_t}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\bullet(y_a) \end{bmatrix}$$

Y finalmente obtenemos un vector de 8 filas relacionando los datos de Marte con los de la Tierra.

$$F(t,X) = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ -\left(\frac{Gm_s}{\left(x_b^2+y_b^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_m}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\right)\bullet(x_{0t}) + \frac{Gm_m}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\bullet(x_b) \\ y_{1t} \\ -\left(\frac{Gm_s}{\left(x_b^2+y_b^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_m}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\right)\bullet(y_{0t}) + \frac{Gm_m}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\bullet(y_b) \\ x_{1m} \\ -\left(\frac{Gm_s}{\left(x_b^2+y_b^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_t}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\right)\bullet(x_{0m}) + \frac{Gm_t}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\bullet(x_a) \\ y_{1m} \\ -\left(\frac{Gm_s}{\left(x_b^2+y_b^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_t}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\right)\bullet(y_{0m}) + \frac{Gm_t}{\left((x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right)^{3/2}}\bullet(y_a) \end{bmatrix}$$

B. Modelo matemático de la nave

En esta segunda parte se procede a realizar un dibujo de la trayectoria elíptica que describiría la nave como se ve en la figura 2. , para facilitar la obtención de las ecuaciones:

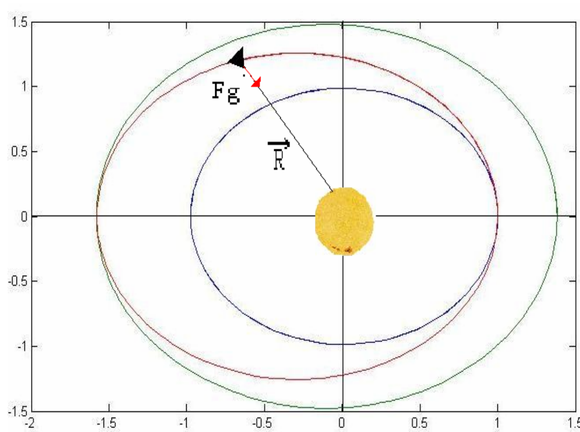

Figura 1. Sistema para la nave

Se parte de la ecuación en donde se aplica la fuerza que ejerce el sol sobre la nave y se obtiene:

$$F(t,X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\dfrac{Gm_s}{\left(x_0^2 + y_0^2\right)^{3/2}} \cdot (x_0) \\ y_1 \\ -\dfrac{Gm_s}{\left(x_0^2 + y_0^2\right)^{3/2}} \cdot (y_0) \end{bmatrix}$$

Para cada ecuación se hace un cambio de variable necesario para pasarlo a programar, tanto en el modelo matemático de la tierra y Marte como en el modelo matemático de la nave.

C. Velocidades: tierra, marte, nave

Por el principio de conservación de la energía se sabe que la energía total de la partícula es una constante del movimiento. La energía de la partícula de masa m en el instante t=0 es:

$$m r_1 v_1 = m r_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

Como los planetas en este caso están describiendo trayectorias elípticas, como se puede observar en la figura 3, alrededor del centro de fuerzas situado en uno de sus focos. La distancia máxima de acercamiento es r_1 y la de máximo alejamiento es r_2 . Las velocidades que lleva el cuerpo en estas dos posiciones externas son v_1 y v_2 respectivamente. La constancia del momento angular y de la energía permite relacionar estas cuatro magnitudes:

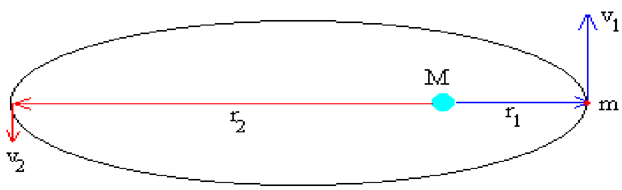

Figura 3. Cuerpo describiendo trayectori eliptica

A partir de las ecuaciones se pueden plantear dos problemas:

- Conocido r_1 y r_2 calcular v_1 y v_2.

Se despeja v_1 en la primera ecuación y se sustituye en la segunda. Obteniendo:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1+r_2)}} \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1+r_2)}}$$

Hay que tener en cuanta que estos cálculos no se pueden realizar aplicando la dinámica del movimiento circular uniforme ya que el centro de fuerzas en este ultimo no coincide con el centro de curvatura de la elipse.[2]

Sabiendo los datos:

$$Ms = 1.98 \times 10^{30}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}$$

$$U_a = 1.496 \times 10^{11}$$

Sabiendo que Ms es la masa del sol, G es la gravedad.

Se reemplaza y se obtienen las velocidades de marte y de la tierra en unidades astronómicas, haciendo las debidas conversiones:

A la nave le corresponde el perihelio del perihelo de la tierra y el afelio al afelio de Marte. Todas las condiciones iniciales son en unidades astronómicas:

Perihelio de la tierra=0.9832
Afelio de la tierra= 1.0167
Perihelio de Marte: 1.3815
Afelio de Marte: 1.6658
Perihelio de la nave: 0.9832
Afelio de la nave: 1.6658
Velocidad en perihelio de la tierra: 6.385
Velocidad en el afelio de la tierra: 6.1638
Velocidad en perihelio de Marte: 5.5758
Velocidad en el afelio de Marte: 4.6242
Velocidad en perihelio de la nave: 7.0889
Velocidad en el afelio de la nave: 4.1841

D. Periodo: Marte, tierra, nave

Se denomina periodo, al tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta completa. En la figura 4 vemos que el radio vector que une el Sol con el planeta barre en el intervalo de tiempo comprendido entre *t* y *t+dt* el área de color rojo de forma triangular.

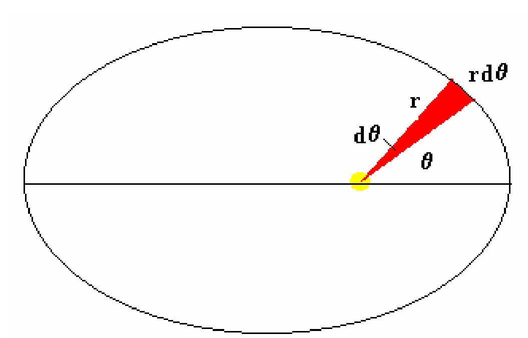

Figura 4. Trayectoria elíptica

El ángulo del vértice de dicho triángulo es *dq* y la base del triángulo es un arco de longitud *rdq.* El área del triángulo es (base por altura dividido por dos)

$$\frac{r(r \cdot d\theta)}{2} = \frac{r^2 d\theta}{2}$$

Integrando la ecuación del momento angular expresado en coordenadas polares

$$\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \int_0^P \frac{L}{m} dt \qquad \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{L}{2m} \int_0^P dt$$

La primera integral es el área total de la elipse *pab*, que es igual a la suma de las áreas de todos triángulos infinitesimales. La integral del segundo miembro es el periodo *P* del planeta, por tanto

$$P = \frac{2m\pi ab}{L}$$

Poniendo el semieje *b* en función del semieje *a*, (final del apartado anterior) llegamos a la fórmula que relaciona el periodo de la órbita de un planeta *P* y el semieje mayor de la elipse *a*, denominada tercera ley de Kepler. [3]

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{(GM)}$$

Periodo de la tierra en días: 366.1301
Periodo de la tierra en años: 1.0170
Periodo de la Marte en días: 688.6457
Periodo de la Marte en años: 1.9129
Periodo de la nave en días: 558.1436
Periodo de la nave en años: 1.5504
El periodo que tarde de la nave de la tierra a Marte en dias es: 279.0718

E. Angulo de inicio entre la tierra y marte para partida de la nave:

Cuando la tierra y marte están situados en su respectivo lugar para el lanzamiento de la nave, la nave espacial precisa de 279.0718 para moverse desde la posición inicial mas cercana del sol (perihelio) a su encuentro con Marte, en la posición más alejada del Sol (afelio).
Durante este tiempo el desplazamiento angular de Marte es

$$\omega_m \cdot P/2 = \text{D rad} = 145.89$$

Donde $\omega_m = v_m/r_m$ es la velocidad angular de Marte.

Para que la nave espacial se encuentre con Marte al cabo de D. En el momento del lanzamiento, Marte debido a su menor velocidad angular, tiene que ir por delante de la Tierra un ángulo

$$\theta = \pi - \omega_m \cdot P/2 = 180º - 145.89º = 34.1º$$

Marte tiene que ir 34.1º por delante de la Tierra en el momento del lanzamiento de la nave espacial en las proximidades de la Tierra.[4]

F. Viaje de vuelta

Para el regreso, la tierra y marte tienen que estar adecuadamente ubicados para el lanzamiento de la nave desde las proximidades de marte. En su viaje de regreso se emplearan 279.0718, durante este tiempo la tierra se ha desplazado un ángulo.

$$\omega_t \cdot P/2 = 4.8183 \text{ rad} = 276.0667º$$

Por tanto, la Tierra tiene que ir por detrás un ángulo de

$$\theta = \omega_t \cdot P/2 - \pi = 276.0667º - 180 = 96.06667º$$

La Tierra tiene que estar por detrás de Marte en el momento del lanzamiento de la nave espacial en las proximidades Marte, un ángulo de 96.06667. [5]

IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para que la nave pueda hacer su recorrido tanto desde la Tierra hasta Marte como desde Marte hacia la Tierra, se tienen que tener unas condiciones iniciales, en las cuales influye las posiciones de la Tierra y Marte en el momento del lanzamiento (en este caso el perihelio de la Tierra y el afelio de Marte), la velocidad inicial de la nave, y el periodo tanto de los planetas como de la nave, pues si alguna de estas condiciones cambia ya tendría que modificarse el algoritmo que me ejecuta la simulación.
Estas son algunas de las imágenes obtenidas de la simulación.

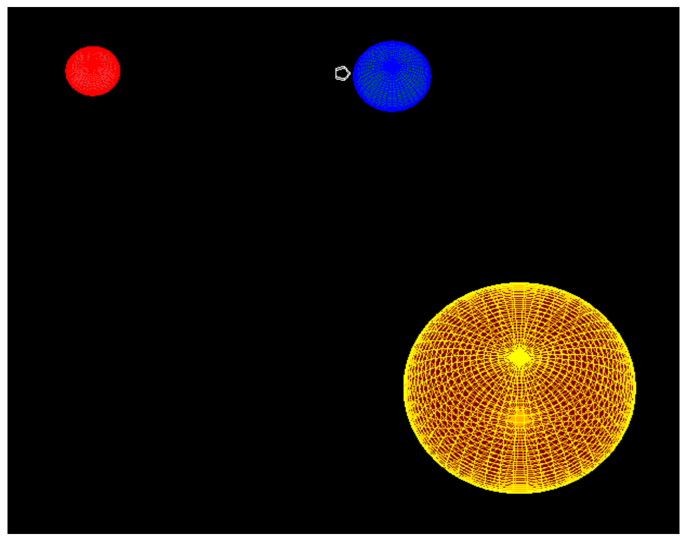

Figura 5. Nave saliendo de la Tierra

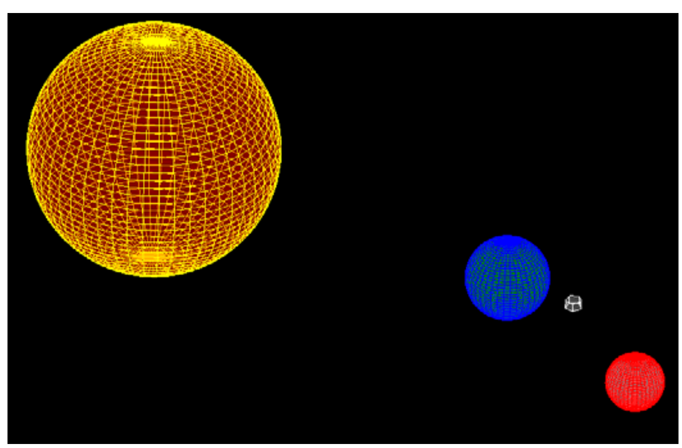

Figura 6. Nave Regresando a La Tierra.

V. CONCLUSIONES

- Realizar una misión espacial con tripulación humana a Marte es muy factible en la actualidad.
- Gracias a los modelos matemáticos utilizados se pueden verificar muchas condiciones a escala de lo que seria en realidad este trayecto.
- Ya que solo se trabajo tomando en cuenta perihelio y afelio de cada objeto el tiempo de duración máximo total del trayecto es de 9 años
- En el caso de la nave, las fuerzas gravitacionales de la tierra y Marte son insignificantes a comparación con la del sol que es la que hace efecto sobre la orbita elíptica de la nave

VI. REFERENCIAS

Samples of the correct formats for various types of references are given below.

Paginas web:

[1] http://www.solarviews.com/span/mars..
[2] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/kepler1/kepler1.htm
[3] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/kepler/fuerza.htm#PeriodoJ.
[4] http:// www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/espiral/espiral.htm.
[5] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/espiral/espiral.htm.
[6]