Leyes de Newton y Kepler para FORMACIÓN de un ANILLO PLANETARIO (Noviembre de 2006)

Claudia Natalia Jiménez, Carlos Andrés Arango, Sandy Manuel Fortich. Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, U.P.B., Medellín-Colombia.

Resume— In this paper we are going to work with the Kepler laws about astronomic masses and the equations that calculates the rotation radio , speed, the excentricity of the trayectory and Newton gravity theory laws to study the creation and recreation of a planet ring from the beginning collision of a planet satellite with an extern agent, followed by its shattering and finally the formation of many orbits with its pieces, all this calculated, iterated and simulated in Matlab.

Índice de Términos— Orbita elíptica, órbita circular, anillos, períodos, satélite, velocidad, fuerza de atracción, energía, semieje.

I. INTRODUCCIÓN

Desde mediados de los años 70 se ha descubierto que no sólo Saturno, el sexto planeta del sistema solar, es el único que posee anillos que lo rodean, esto también resultó ser característica de otros planetas, como lo son Júpiter, Urano y Neptuno.

Un anillo planetario es un anillo de polvo y otras partículas pequeñas que giran alrededor de un planeta, estas partículas pueden ser de silicato o polvo helado y hielo y agua en el caso de Saturno. Los anillos se encuentran mucho más cerca del planeta padre que cualquiera de sus satélites principales; más específicamente en el plano ecuatorial del planeta, donde casi toda la materia que los constituye se encuentra confinada en una delgada región en ese plano, de hecho, el grueso de cada sistema de anillos se encuentra a una distancia de la superficie del planeta inferior a un radio planetario. Los tamaños varían desde el tamaño de micrómetros al de piedras del tamaño de decenas de metros. Muchas veces los anillos tienen lunas pastoras; pequeños satélites que giran en los bordes exteriores de anillos o dentro de los huecos en los anillos, y que son responsables de las divisiones.

El origen de los anillos planetarios no se conoce, pero se piensa que son inestables y desaparecen en unos centenares de millones de años. Como resultado, los sistemas del anillo actuales deben ser de origen moderno, posiblemente formado de los desechos de un satélite natural que sufrió un impacto grande.

II. OBJETIVOS

Objetivo general

Este trabajo tiene como objetivo principal llevar a la practica uno de los métodos de solución de ecuaciones diferenciales, es decir, mostrar las aplicaciones importantes que pueden llegar a tener los métodos vistos en clase en el análisis de fenómenos astronómicos como los son para nuestro caso la formación de un anillo planetario.

Objetivos especificos:

- Tomando como base las leyes de Newton para la gravedad, y las leyes de kepler para el movimiento de astros, hallar la ecuación diferencial que describen las partículas que conforman un anillo planetario.
- Implementar métodos numéricos avanzados en la solución de ecuaciones diferenciales. Y de esta forma hallar la trayectoria y velocidad de las partículas que forman el anillo.
- Utilizando como herramienta de programación Matlab simular de manera gráfica la solución de la ecuación diferencial que describe el movimiento de las partículas que conforman un anillo planetario.

III. DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO REALIZADO

La base de este trabajo la hallamos en las leyes de Newton y las leyes de Kepler, ya que es a través de estas que se hallan las ecuaciones diferenciales y la trayectoria que describen las partículas de nuestro anillo.

Teniendo en cuenta las leyes de gravedad y empleando la dinámica del movimiento circular uniforme describiremos la trayectoria de un satélite de masa m (que para nuestro caso será el satélite natural de la tierra) en orbita casi circular de radio R alrededor de un planeta (tierra) de masa *M.* Hablamos de una orbita casi circular puesto que realmente la orbita descrita por cualquier astro en el universo no es totalmente circular sino elíptica, para este caso lo que sucede es que la excentricidad de la orbita elíptica es muy pequeña y da la impresión de un movimiento circular.

Para la formación de nuestro anillo haremos desaparecer el satélite natural de la tierra por medio de un choque de un cometa lo suficientemente grande como para destruirla en los fragmentos de masa diferente que mas tarde serán las partículas que quedaran en orbita a diferentes velocidades, generando como consecuencia un anillo para la tierra.

Fig.1. Planeta Saturno.

Ahora para la implementación en matlab, la propuesta fue hacer una partición de la simulación en tres programitas individuales que se interconectarían con la pulsación de una tecla o el cambio del currentcharacter que mantenga la parte del código que se este ejecutando en el momento. Esto es para emplear el método de programación modulada que simplificaría la elaboración del código para la simulación, es decir logramos un código más compacto, entendible y mucha más facilidad para su manejo y distribucion.

IV. La matematica

A continuación encontramos la deducción de la ecuación diferencial para la descripción del movimiento de la luna alrededor de la tierra.

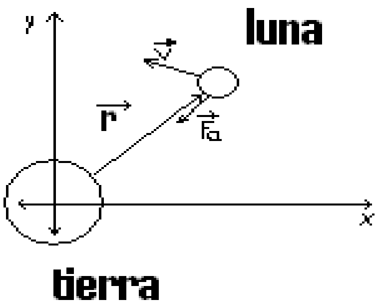

Fig.2. Vector posición de la tierra-luna.

Si trazamos un eje de coordenadas con centro en la tierra y llamamos $\vec{r}$. al vector posición de la luna con respecto a la tierra, $\vec{Fa}$ a la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre la luna, y $\vec{v}$ a la velocidad que lleva la luna en ese momento podremos plantear las siguientes relaciones:

De las leyes de gravedad de Newton

$$Fa = \frac{k(Mm)}{d^2} \quad (1)$$

Con K, constante universal gravitatoria; M, la masa de la tierra; m, la masa de la luna; d, la distancia entre la luna y la tierra.

Teniendo en cuenta las anteriores convenciones podemos adaptar la fuerza gravitatoria entre la tierra y la luna de una forma vectorial. Entonces podríamos decir que:

$$\left|\vec{Fg}\right| = \frac{G(M_T m_L)}{d^2}; \quad (2)$$

Siendo $\vec{Fg}$ la fuerza gravitatoria ejercida por la tierra, G la constante de gravitación universal ($1.496\times10^{11} m$), M la masa de la tierra, m la masa de la luna, y d la distancia de separación entre ellas.

Expresando de forma escalar, aplicando magnitud de $\vec{Fg}$ y teniendo en cuenta la geometría de la fig.1. Tendremos:

$$Fg = \frac{G(M_T m_L)}{|\vec{r}|^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (3) \longrightarrow Fg = -\frac{G(M_T m_L)}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r} \quad (4)$$

De la fig.1. Sabemos que $\vec{r}$ tiene componentes (x,y). Si $.r^2 = x^2 + y^2$. entonces . $|\vec{r}|^3 = (x^2 + y^2)^{3/2}$.; entonces:

$$\sum F = -\frac{G(M_T m_L)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\cdot(x_L, y_L) \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que F=m*a, con a siendo la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo nos queda:

$$F = ml\left(\frac{d^2 x_L}{dt^2}, \frac{d^2 y_L}{dt^2}\right) \quad (6)$$

De lo anterior podemos obtener nuestras ecuaciones diferenciales:

$$-\frac{GM_T m_L}{|\vec{r}|^3}\cdot x_L = m_L\left(\frac{d^2 x_L}{dt}\right) \text{; para } x. \quad (7)$$

$$-\frac{GM_T m_L}{|\vec{r}|^3}\cdot y_L = m_L\left(\frac{d^2 y_L}{dt}\right) \text{; para } y. \quad (8)$$

Dadas las condiciones iniciales (posición y velocidad inicial) este sistema de dos ecuaciones se puede resolver por el método de Runge-Kutta. Este método es un método genérico de resolución numérica de ecuaciones diferenciales muy exacto que llega a ser considerado debido a que es de orden de convergencia mayor, en comparación con el método de Euler.

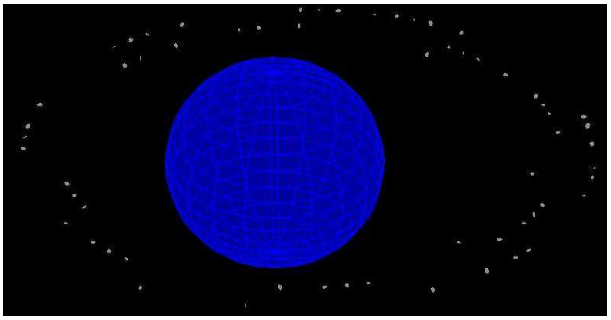
Fig.3. Simulación del anillo en matlab.

V. ESCALAS

Todas las ecuaciones diferenciales para poder solucionarlas por procedimientos numéricos es necesario prepararlas para que no se manejen números muy grandes, o por el contrario números muy pequeños.
En nuestro caso, para las ecuaciones que describen el movimiento de la tierra y de la luna, se establece un sistema de unidades en el que la longitud es la distancia media entre la luna y la tierra:

$$.L = 3.844\times10^{8}\, m\,.$$

El tiempo que tarda la luna en darle una vuelta a la tierra es:

$$.P = 27\text{d}\ \ 7\text{h}\ \ 43{,}7\text{min} = 2.3606 \times 10^{6}\, s\,.$$

Entonces el nuevo sistema de unidades queda:

$$.r = r'L\,;\ t = t'P\,; x = x'P\,.$$

La primera ecuación con este nuevo sistema de unidades nos queda:

$$\frac{d^2x'}{d^2t'}\frac{L}{p^2} = -\frac{GM}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,x'\frac{L}{L^3}$$

(9)

$$\frac{d^2x'}{d^2t'} = -\frac{GMP^2}{L^3}\frac{x'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(10)

Como L es el semieje mayor de la órbita de la luna alrededor de la tierra, P es el periodo o tiempo que tarda en dar una vuelta completa, y M es la masa de la tierra. Por la tercera ley de Kepler, el término.

$$.\frac{GMP^2}{L^3} = c\,.; \qquad \text{con} \qquad \mathrm{M} = 5.97\times10^{24}\,Kg\,,$$

$$\mathrm{G} = 6.67\times10^{-11}\,Nm^2/Kg^2 \qquad \mathrm{c} = 38.193654874329$$

volviendo a la notación de las ecuaciones con el nuevo sistema de unidades tenemos:

$$\frac{d^2x'}{d^2t'} = -c\frac{x'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(11)

$$\frac{d^2y'}{d^2t'} = -c\frac{y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(12)

VI. INDICACIONES ÚTILES

Principio de conservación de la energía:
La energía total de la partícula es una constante del movimiento. La energía de la partícula de masa *m* en el instante inicial *t*=0 es:

$$E = \frac{1}{2}mV_0^{\,2} - \frac{GmM}{r_0}$$

(13)

Cuando $E_0 < 0$ a partícula permanece confinada en el espacio que rodea a los dos cuerpos. Cuando $E_0 \geq 0$ la partícula escapa al infinito
La energía de la partícula en el instante *t* es igual a:

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^{\,2} + v_y^{\,2}) - \frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(14)

En el nuevo sistema de unidades establecido la nueva energía sería:

$$e' = \frac{E}{m}\frac{P^2}{L^2} = \frac{1}{2}v'^2 - 4\pi^2\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(17)

Fuerza central y conservativa:
Para un cuerpo que describe una trayectoria elíptica alrededor de un centro de masa situado en uno de los focos de la trayectoria, la distancia de máximo acercamiento al centro es r1, la velocidad en ese punto es v1, y la de máximo alejamiento es r2 con una velocidad v2. Las definiciones de momento angular y energía nos permiten relacionar dichas magnitudes:

$$mr_1v_1 = mr_2v_2$$

(16)

$$\frac{1}{2}mv_1^{\,2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{GMm}{r2}$$

(17)

Se pueden plantear dos problemas:

- Conocido r1 y r2, calcular v1 y v2:

Se despeja v1 en la primera ecuación y se sustituye en la segunda, obteniendo:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1 + r_2)}} \quad (18) \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \quad (19)$$

Si R es el radio de curvatura de la elipse en la posición más cercana del centro de fuerzas, la ecuación de la dinámica del movimiento circular uniforme se escribe

$$m\frac{v_1^{\ 2}}{R} = G\frac{Mm}{r_1^{\ 2}} \quad (20) \qquad R = \frac{r_1^{\ 2}v_1^{\ 2}}{GM} = \frac{L^2}{GMm^2} \quad (21)$$

Conocido r1 y v1, se puede encontrar r2 y v2:

$$v_2 = \frac{2GM}{r_1 v_1} - v_1 \quad (22)$$

VII. Conclusiones

- El antiguo pensamiento, o las viejas creencias de que los planetas giraban en órbitas circulares, cambiaron totalmente con la propuesta de Johannes Kepler; las tres leyes acerca de los movimientos de los planetas. La primera: los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas en las que el Sol ocupa uno de los focos de la elipse. La segunda: las áreas barridas por el segmento que une al Sol con el planeta (radio vector) son proporcionales a los tiempos empleados para describirlas. Como consecuencia, cuanto más cerca está el planeta del Sol con más rapidez se mueve. La tercera: Los cuadrados de los periodos siderales de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas. Esto permite deducir que los planetas más lejanos al Sol orbitan a menor velocidad que los cercanos; dice que el período de revolución depende de la distancia al Sol.
- Las tres leyes de Kepler son fundamentales para comprender las trayectorias orbítales de la Luna y de los satélites artificiales.
- Otra ley importante a la hora de estudiar y analizar las ecuaciones que rigen los planetas y sus satélites es la ley de la gravitación de Isaac Newton, la cual afirma que la atracción gravitatoria entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.
- Matlab es una herramienta de trabajo muy extendida, tanto entre estudiantes como entre técnicos e investigadores, ya que tiene diversas aplicaciones como lo son: computación y matemáticas, desarrollo de algoritmos, modelado y simulación, exploración, visualización y análisis de datos, creación de graficas científicas.
- Para realizar una simulación en matlab se debe partir planteando las ecuaciones diferenciales que rigen la situación a simular, con sus respectivas condiciones iniciales, y tener presente que el método numérico para la solución de dichas ecuaciones sea el más exacto y apropiado para que la simulación sea todo un éxito.

VIII. Bibliografía

[1] Resnick, Halliday, Krane, "Física" 5a. ed. vol. 2, Paul Stanley California Lutheran University, Ed. Mexico, 2005, pp. 567–1204.
[2] Georlín Díaz, "*Algebra lineal*" (No1, 3ra edición). Medellín Colombia, 2004, Apoyo a la docencia, pp. 1-303.
[3] The Math Works,inc. "MATLAB the lenguaje o f technical computing: Using Matlab Graphics" Version 6. Fourth Printing
[4] Dennis G. Zill, "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*". México: International Thomson, 2000, Sexta edición, pp.2-550.

HTTP://CURIOUS.ASTRO.CORNELL.EDU/QUESTION.PHP?NUMBER=326

HTTP://WWW.ASTRO-TOM.COM/GETTING_STARTED/PLANETARY_RINGS.HTM

HTTP://WWW.DUSTBUNNY.COM/AFK/PLANETS/

HTTP://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/PLANETARY_RING

HTTP://WWW.SPACETODAY.ORG/SOLSYS/EXPLORINGSOLARSYSTEM/EXPLORINGRINGS.HTML

HTTP://WWW.SC.EHU.ES/SBWEB/FISICA/CELESTE/KEPLER1/KEPLER1.HTM

IX. Acerca de los autores

Carlos Andrés Arango nació en Medellín, Antioquia en 1986. Se graduó del colegio corazonista en 2003 y estuvo un año de intercambio en Inglaterra. Ahora esta cursando 4to semestre de ingeniería eléctrica en la UPB
Sandy Manuel Fortich nació en 1986 en Montelibano, Córdoba. Curso primaria y bachillerato en la Fundación Educativa de Montelibano y se graduó en 2004, ahora se encuentra cursando 4to semestre de ingeniería electrónica
Claudia Natalia Jiménez nació en 1987 en Montelibano, Córdoba. Se graduó en la Fundación Educativa de Montelibano en 2004, actualmente se encuentra cursando 4to semestre de ingeniería eléctrica