Un Modelo para Simular el Precio de Acciones Utilizando el Toolbox GARCH

Norman Giraldo Gomez
Profesor Asociado
Escuela de Estadística
Universidad Nacional de Colombia

Contenido

El Model CAPM

Definiciones Básicas. Se asumen n acciones transadas en la Bolsa.

El precio de cierre de la j-ésima acción, al final del período [t-1,t], se denota por $P_j(t) > 0$ t=1,2,…,.

El rendimiento de la j-ésima acción en el período [t,t+1], se define como

$$r_j(t) = \ln(P_j(t+1)/P_j(t))$$

El portafolio de mercado consiste del total de todas las n acciones. Su rendimiento está dado por

$$r_m(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(t) r_j(t)$$

donde $\omega_j(t)$ = (valor total de las unidades de la j-ésima acción)/
(valor total del portafolio de mercado en el tiempo t)

La tasa sin riesgo de crédito del mercado, efectiva para el período [t,t+1], se indica por i(t), y la correspondiente tasa continua se expresa por r(t) = ln(1+i(t)).

El Modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) establece que, para la acción j-ésima, si se ajusta el modelo de regresión lineal:

$$r_j(t) - r(t) = \alpha_j + \beta_j(r_m(t) - r(t)) + \varepsilon_j(t),$$

para t=1,2,…, donde las $\varepsilon_j(t)$ son variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuídas, $N(0, \nu_j^2)$ entonces se debe cumplir

$$E[r_j(t) - r(t)] = \beta_j E[r_m(t) - r(t)]$$

El coeficiente beta β_j establece la relación entre

$$\begin{pmatrix} \text{prima de riesgo para} \\ \text{el inversionista en la acción j-ésima} \end{pmatrix} = (\text{beta})\,(\text{prima de riesgo del mercado})$$

Riesgo sistemático: también llamado no diversificable, se puede definir como la variación del rendimiento de una acción o un portafolio de acciones que puede atribuirse a las variaciones del mercado

$$E[r_j(t) - r(t)] = \beta_j E[r_m(t) - r(t)]$$

De la relación anterior puede deducirse que los betas miden el riesgo sistemático de una acción. También se cumple que:

$$\mathrm{Var}(r_j(t) - r(t)) = \beta_j^2 \ \mathrm{Var}(r_m(t) - r(t)) + \mathrm{Var}(\varepsilon_j(t))$$

Entre las compañías que tienen betas más bajos se encuentran las compañías de servicios públicos, cuyas tasas de rendimiento se encuentran reguladas, (gas, luz, combustibles, etc.).

Por otra parte, el grupo que tiene el beta más alto es de las instituciones de ahorro y crédito y las compañías de construcción.

betas	El rendimiento del mercado aumenta en 1%, entonces el rendimiento de la acción:
= 1 > 1 < 1 = 0 < 0	aumenta 1% aumenta más de 1% disminuye menos de 1% es cero es negativo

Estudios con datos de mercados de diferentes países han mostrado que los coeficientes beta, para acciones individuales o de portafolios, no son estables en el tiempo

En lugar de β_j se escribe $\beta_j(t)$

$$r_j(t) - r(t) = \beta_j(t)(r_m(t) - r(t)) + \varepsilon_j(t),$$

SOCIEDAD EMISORA	BETA	R^2	VOLATILIDAD ANUALIZADA	IBA (1)
ESTABLECIMIENTOS FINANCIEROS				
BANCO ANGLO COLOMBIANO	0,74	13,62%	48,48%	A
BANCO COMERCIAL ANTIOQUEÑO	1,40	60,06%	43,49%	A
BANCO DE BOGOTA	0,64	29,51%	28,49%	A
BANCO DE COLOMBIA	0,94	34,77%	38,26%	A
BANCO DE OCCIDENTE	0,10	1,87%	17,95%	A
BANCO GANADERO	0,67	27,44%	30,83%	A
BANCO GANADERO - PREFERENCIAL	0,54	8,72%	43,98%	A
BANCO INDUSTRIAL COLOMBIANO	0,63	47,47%	21,92%	A
BANCO NACIONAL DEL COMERCIO	-0,07	0,99%	19,95%	ME
BANCO SUPERIOR - PREFERENCIAL	0,81	16,81%	47,72%	A
CIA. COL. DE SEGUROS S.A. REASEGURADORA	NT*			
COMPAÑIA SURAMERICANA DE SEGUROS S.A.	0,52	33,74%	21,71%	A
CORFIDESARROLLO S.A.	0,30	3,33%	42,35%	ME
CORP. FINANCIERA DEL VALLE S.A. - ORDINARIA	-0,01	0,09%	10,59%	ME
CORP. FINANCIERA DEL VALLE S.A.- PREFERENCIAL	0,21	11,24%	15,86%	ME
CORP. FINANCIERA NACIONAL Y SURAMERICANA S.A.	0,46	24,73%	22,22%	A
SOCIEDAD DE CAPIT. Y AHORROS BOLIVAR S.A	-0,02	0,01%	64,17%	ME
PROMEDIO PONDERADO	0,33			
AGRICULTURA GANADERIA CAZA Y PEZCA				
FONDO GANADERO DE ANTIOQUIA S.A.	0,47	5,81%	46,95%	A
FONDO GANADERO DE CUNDINAMARCA S.A. (2)	-0,04	0,02%	88,09%	ME
SETAS COLOMBIANAS S.A.	-0,19	3,04%	27,98%	ME
PROMEDIO PONDERADO SECTOR	0,36			
EXPLOTACION DE MINAS				
AURINVERSIONES S.A.	NT*			
MINEROS DE ANTIOQUIA S.A.	0,85	30,05%	37,17%	ME
TOLCEMENTO CALES Y CEMENTOS DE TOLUVIEJA	NT*			
PROMEDIO PONDERADO SECTOR	0,85			
MANUFACTURA				
ACERIAS PAZ DEL RIO S.A.	0,82	6,33%	78,38%	ME
BAVARIA S.A.	0,81	35,30%	32,57%	A

COEFICIENTES BETA

POR EMISOR Y SECTOR ECONOMICO

DOS AÑOS JUNIO 1994 - 1996

Modelo de Simulación para el Precio de una Acción

Para simular los precios de una acción $P_j(t) > 0$ en los tiempos t=1,2,…,T

se simulan primero sus rendimientos $r_j(t) = \ln(P_j(t+1)/P_j(t))$

Ya que, entonces $P_j(t+1) = P_j(t)\exp(r_j(t))$

Para simular los rendimientos utilizamos el modelo CAPM

$$r_j(t) = r + \beta_j(t)(r_m(t) - r) + \varepsilon_j(t)$$

Requiere simular primero:

1. El rendimiento del portafolio de mercado = $r_m(t)$
2. El beta = $\beta_j(t)$
3. Los errores (riesgo no sistemático) = $\varepsilon_j(t)$

1. Simulación del Rendimiento del Portafolio de Mercado

El rendimiento del portafolio de mercado $r_m(t)$ es muy difícil de medir.

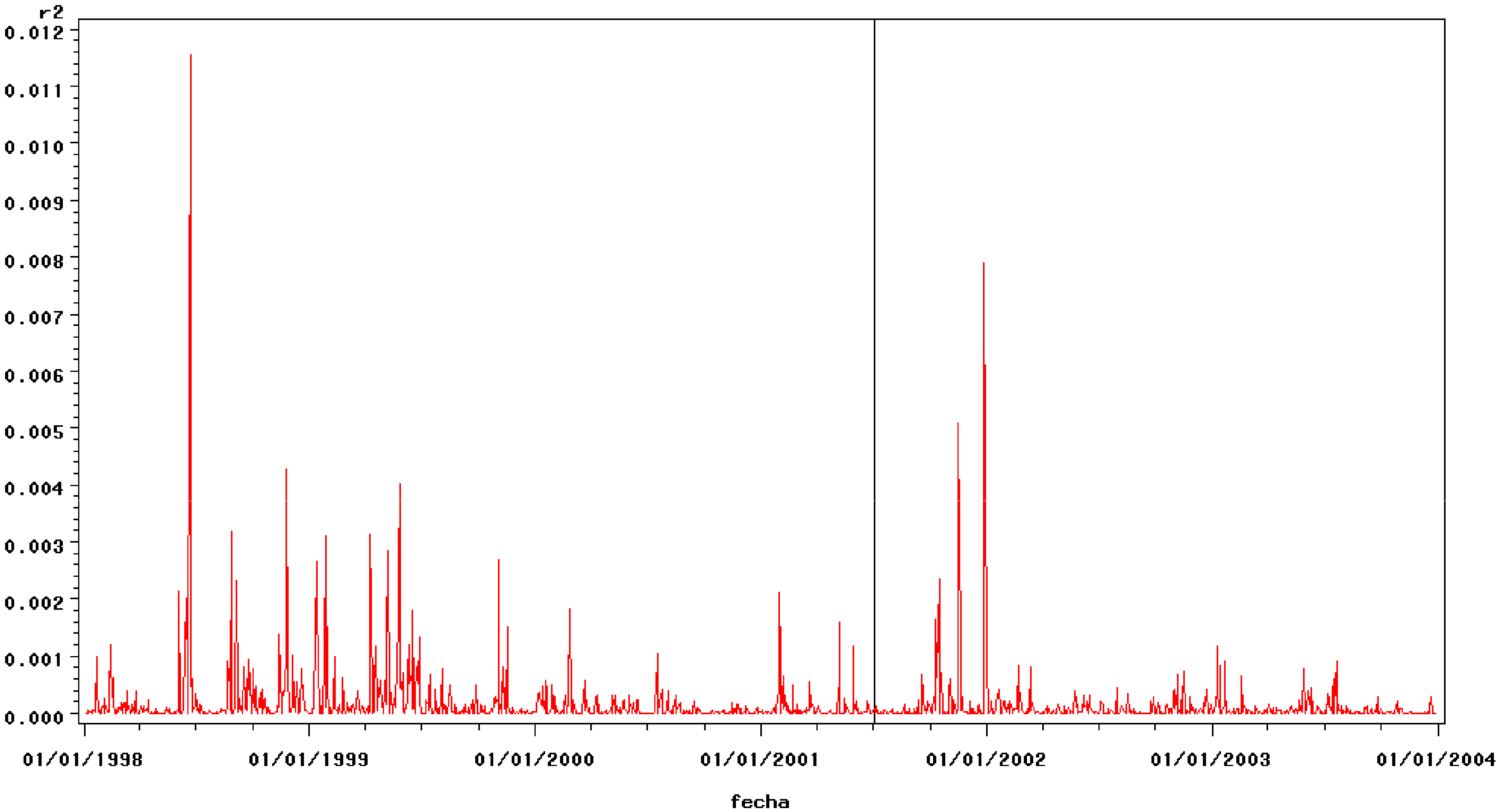
$$r_m(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(t) r_j(t)$$

En su lugar se utiliza el rendimiento del índice bursátil
IGBC = Indice de la Bolsa de Colombia

$$r_m(t) = \log\left(\frac{IGBC(t+1)}{IGBC(t)}\right)$$

El índice IGBC proporciona información acerca de los movimientos de los precios de las acciones con mayor bursatilidad,

$r_m(t)$ proporciona información acerca de la volatilidad de los precios de las acciones con mayor bursatilidad.



$$\text{Volatilidad}(t) = \sigma(t) = \sqrt{\text{Var}(r_m(t))}$$

El Toolbox GARCH

El Toolbox GARCH, combinado con los Toolboxs de Estadística y Optimización, provee herramientas para modelar la volatilidad de series de tiempo univariadas, que presenten el fenómeno de heterocedasticidad. Por ejemplo, la serie de rendimientos del IGBC $r_m(t)$

Heterocedasticidad (endógena) = la varianza (condicional) no es constante y depende de valores anteriores de la misma serie y de errores adicionales Independientes.

El toolbox GARCH utiliza un modelo general ARMAX combinado con de 3 tipos de modelos para la varianza condicional: GARCH, EGARCH y GJR, para:

Operación	Función Matlab
1. Diagnósticos Iniciales	parcorr, autocorr, lbtest, archtest
2. Estimación de Parámetros	garchfit
3. Simulaciones.	garchsim
4. Pronósticos.	garchpred

El Modelo ARMAX(R,M,N) / GARCH(P,Q) del Toolbox es:

$$r(t) = c + \sum_{j=1}^{R} \varphi_j \, r(t-j) + \varepsilon(t) + \sum_{j=1}^{M} \theta_j \varepsilon(t-j) + \sum_{k=1}^{N} \beta_k X(t,k)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) a(t)$$

$$\sigma^2(t) = \kappa + \sum_{j=1}^{P} \gamma_j \sigma^2(t-j) + \sum_{j=1}^{Q} \alpha_j \varepsilon^2(t-j)$$

donde a(t) es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Normal(0,1) ó Tn

Ejemplo: Modelo AR(1) / GARCH(1,1)

$$r(t) = c + \varphi_1 \, r(t-1) + \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) a(t)$$

$$\sigma^2(t) = \kappa + \gamma_1 \, \sigma^2(t-1) + \alpha_1 \, \varepsilon^2(t-j)$$

Ejemplo de instrucciones en Matlab

```
clear all;
port = importdata('c:\matlab\work\portafolio.prn');
igbc = port.data(:,9);
cdt90 = port.data(:,10);
cdt90 = ((1-cdt90./400).^(-4)).^(1/360)-1;

[y,ly] = lagmatrix_k(igbc,1,0);
r = log(y./ly);
y = r - cdt90(2:end);

% estimacion ar(1) / garch(1,1)  de igbc-cdt90 =
```

$r_m(t) - r(t)$

```
spec_igbc = garchset('Distribution','T','R', 1, 'P', 1, 'Q', 1);
[coef,error,llf,e,sigma_y,sumario] = garchfit(spec_igbc,y);
garchdisp(coef,error)
```

$$r(t) = c + \varphi_1 \, r(t-1) + \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) a(t)$$

$$\sigma^2(t) = \kappa + \gamma_1 \, \sigma^2(t-1) + \alpha_1 \, \varepsilon^2(t-j)$$

Resultados

Mean: ARMAX(1,0,0); Variance: GARCH(1,1)

Conditional Probability Distribution: T
Number of Model Parameters Estimated: 6

	Parameter	Value	Standard Error	T Statistic
	C	0.00068674	0.0002499	2.7481
	AR(1)	0.33531	0.035552	9.4315
	K	1.3197e-005	4.7094e-006	2.8022
γ_1	GARCH(1)	0.63186	0.078609	8.0380
α_1	ARCH(1)	0.3037	0.098365	3.0874
	DoF	3.3894	0.42173	8.0370

Nota: a(t) ~ T de Student con 3.4 grados de libertad

Ejemplo de Simulación

Con los coeficientes estimados se puede simular el modelo.
En la variable “coef” se guarda una nueva estructura con los valores estimados de los coeficientes.

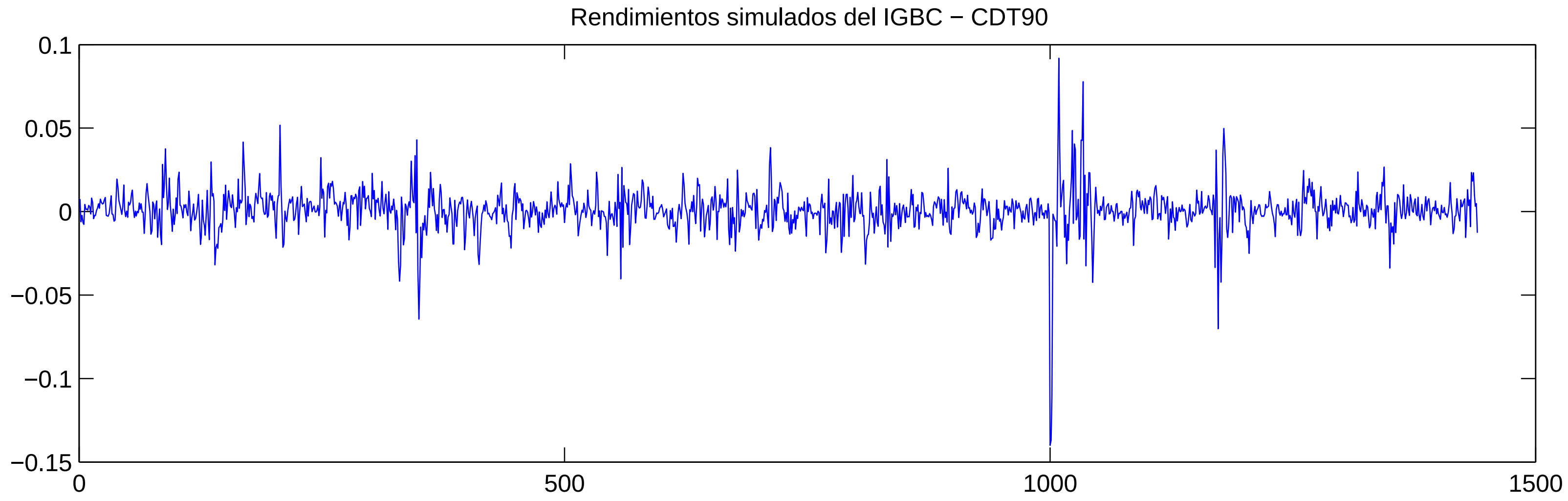
% simulacion utilizando los coeficientes estimados

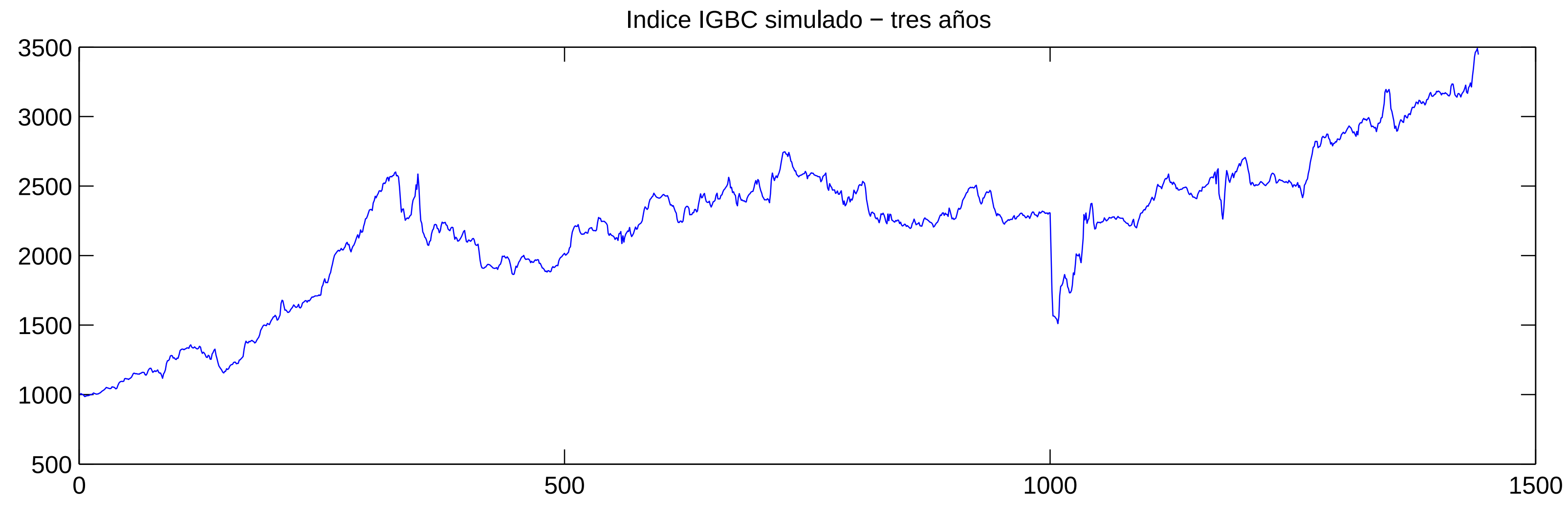
```
n = 360*4;
[epsilon_sim, sigma_sim, r_m] = garchsim(coef,n,[],sum(100*clock));
```

$$r(t) = c + \varphi_1\, r(t-1) + \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)a(t)$$

$$\sigma^2(t) = \kappa + \gamma_1\, \sigma^2(t-1) + \alpha_1\, \varepsilon^2(t-j)$$





Resultados de la Simulación del IGBC para 3 años

2. Simulación del Coeficiente Beta (riesgo sistemático de la acción)

Existen muchos modelos disponibles para simular el Beta,

p.ej. toda la familia de procesos ARMA(p,q), entonces, cuál utilizar?

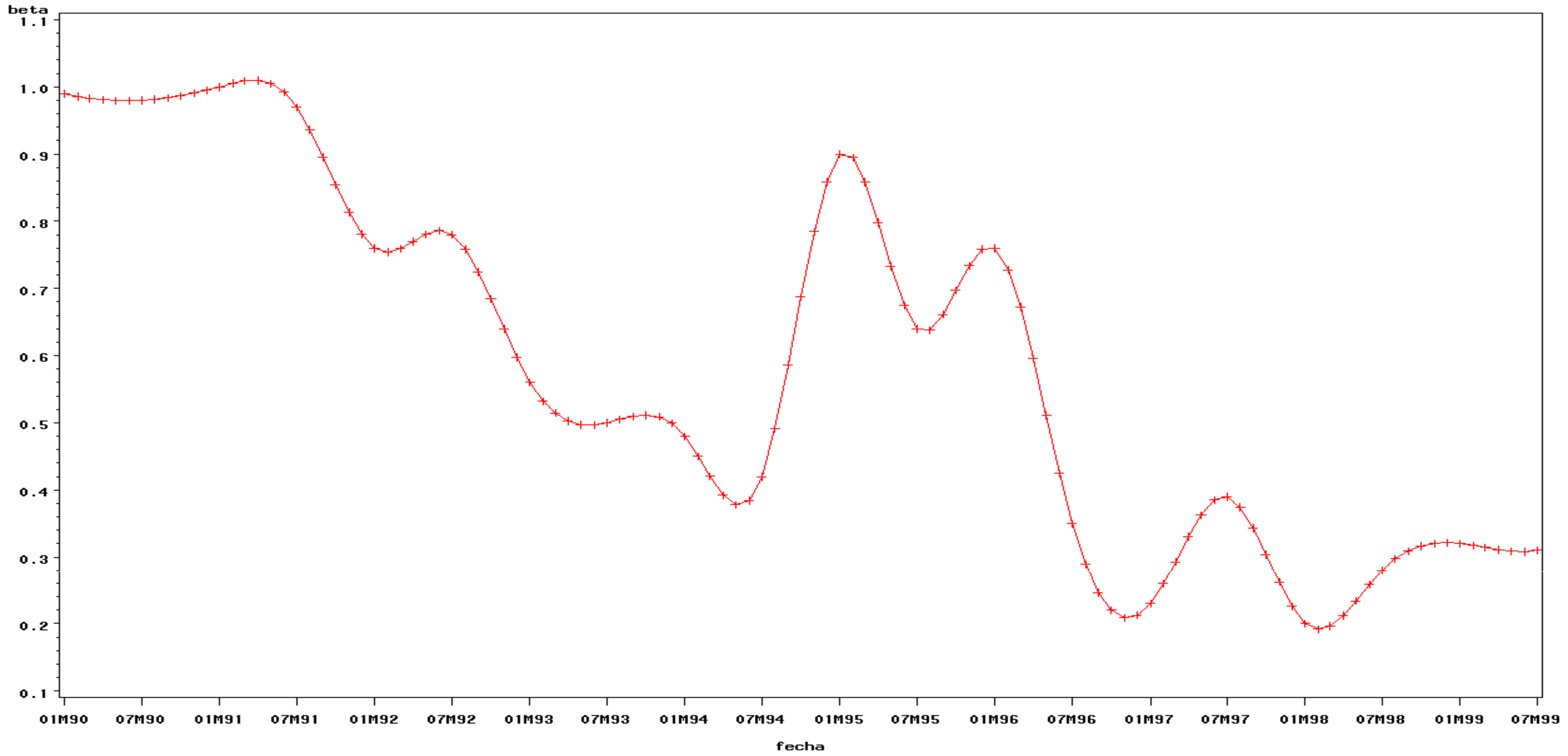
Condiciones que debería cumplir el modelo para los betas:

- **Trayectorias poco oscilantes**: los betas varían como consecuencia de fusiones o incorporaciones, o por eventos macro-económicos.

- **Trayectorias dentro de una banda de valores**: por ejemplo [-0.3, 1.5]

- **Trayectorias estacionarias**: varianza constante, media constante, auto-covarianza dependiente solamente del período de tiempo entre dos observaciones.

Respuesta: usar un proceso estacionarios en covarianza,de tipo gaussiano, con autocovarianza tendiendo a cero lentamente.



Ejemplo. Gráfica de Betas de la Acción de Banco de Bogotá, semestrales, interpoladas mensualmente

Valores tomados de la SuperBancaria:

0.99 0.98 1.00 0.97 0.76 0.78 0.56 0.50 0.48 0.42 0.90 0.64 0.76 0.35 0.23 0.39 0.2 0.28 0.32 0.31

Detalles de la simulación de los betas. Se simuló un proceso gaussiano con función de autocovarianza dada por:

$$R(\tau) = \sigma^2 (1 + \alpha |\tau| + \alpha^2 |\tau|^{2/3}) \exp(-\alpha |\tau|),$$
$$-\infty < \tau < \infty, \alpha > 0, \sigma > 0,$$

donde

$$\text{Correlacion } (\beta(t), \beta(t+\tau)) = R(\tau) / \sigma^2$$

y, adicionalmente

$$E(\beta(t)) \equiv 0$$
$$Var(\beta(t)) \equiv \sigma^2$$

* Los detalles de cómo simular estos procesos requieren más tiempo

3. Simulación de los errores (riesgo no-sistemático)

Los errores en el modelo CAPM son $\varepsilon_j(t)$

$$r_j(t) = r + \beta_j(t)(r_m(t) - r) + \varepsilon_j(t)$$

El Toolbox de Estadística de Matlab tiene toda una serie de funciones para simular distribuciones de errores, tales como la Normal y la T de Student. Adicionalmente, en el sitio Web de Matworks se pueden conseguir programas con otros tipos, por ejemplo, la distribución de error generalizada (GED), distribuciones alfa-estables, etc.

Los errores Normales($0, \sigma_\varepsilon^2$), se simulan con la función:

normrnd(0, sigma, n, 1).

Conclusión

El programa en Matlab para simular los precios de una acción con base en el modelo CAPM se basa en simular cada componente por separado en la ecuación

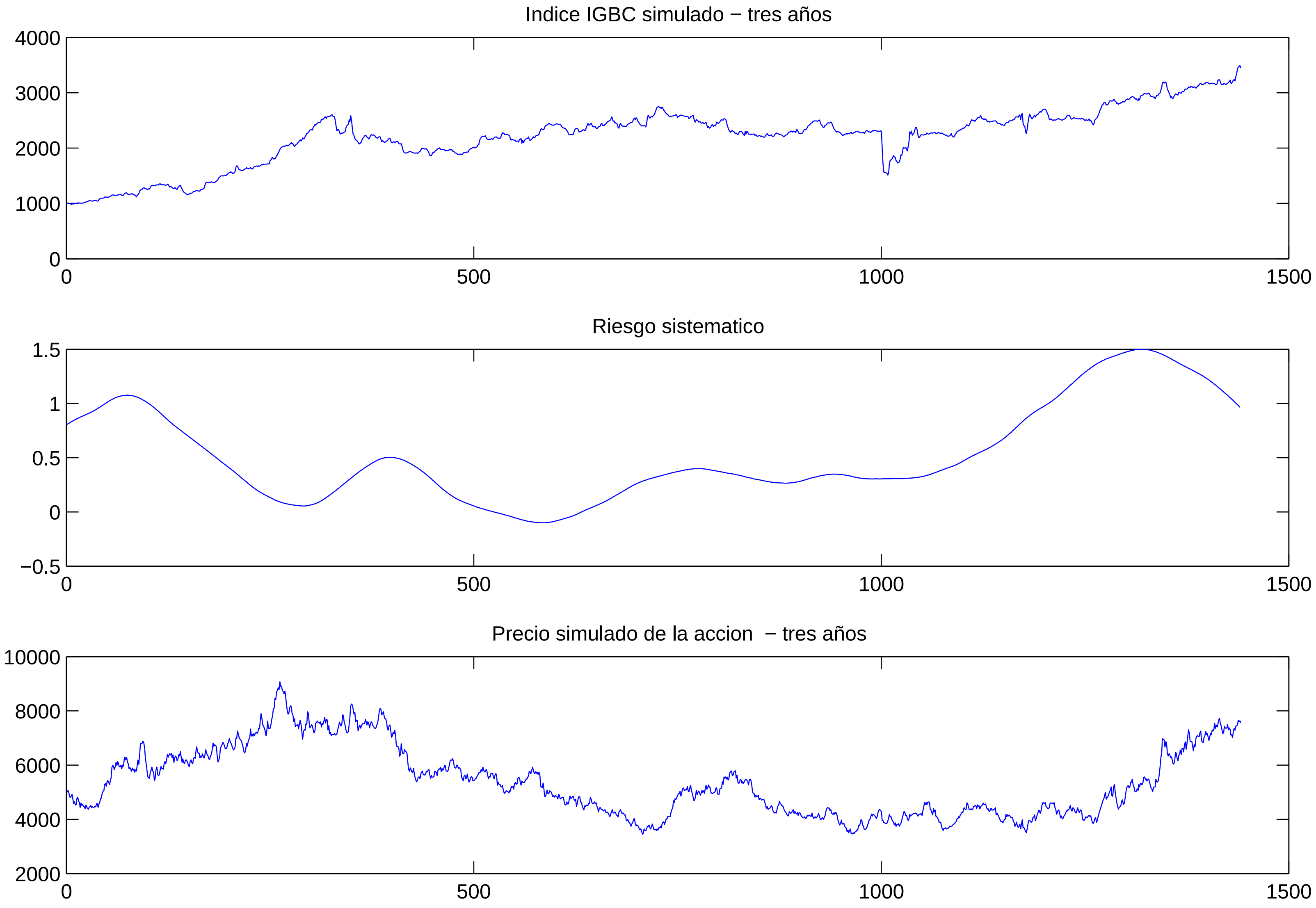
$$\boxed{r_j(t) = r + \beta_j(t)(r_m(t) - r) + \varepsilon_j(t)}$$

Por ejemplo:

```
beta = a + (b-a).*(b1-min(b1))./(max(b1)-min(b1));
epsilon = 0.02*normrnd(0,1,n,1);

% genera el rendimiento
r = 2*1e-04;
r_t = r+beta.*r_m+epsilon;

% la función ret2price convierte el rendimiento en precio
P_t = ret2price(r_t,5000);
```



Resultados: IGBC – Beta – Precio Acción

Ejemplo de Aplicación:

Predicción de Betas y VaR de Portafolios de Acciones mediante el Filtro de Kalman y Modelos Garch

Norman Giraldo Gomez

Resumen

En este trabajo se estudió el desempeño de un estimador del VaR de portafolios de acciones, basado en la estimación de los coeficientes betas de las acciones que lo conforman, conocido como el VaR factorial, estimando estos betas recursivamente mediante el filtro de Kalman y modelando el término que depende de la volatilidad de los rendimientos del mercado de acuerdo a modelos condicionalmente heterocedásticos del tipo GARCH, EGARCH y GJR. Con base en simulaciones basadas en un modelo de baja oscilación para los betas, se compararon los resultados de estos modelos con el VaR calculado con la metodología media-varianza de RiskMetrics. (Trabajo realizado con el apoyo del DIME-U.Nal Medellín, contrato No 030802656.)

Conclusiones

- Medir la volatilidad de índices bursátiles y de portafolios de acciones es importante para realizar cálculos como el Valor en Riesgo de portafolios, o en la valoración de derivados.

- El toolbox GARCH de Matlab ofrece funciones para ajustar tres de los modelos más utilizados para la volatilidad: garch, egarch y gjr. Además de ajustar permite simular y pronosticar.

- La simulación es útil en general por muchas razones: cuando no se puede observar una variable, como en el caso de los betas, ó cuando obtener datos es muy costoso, ó cuando el modelo es muy complejo. En el caso concreto del ejemplo, se pueden combinar funciones propias del programa con funciones adicionales para simular de manera más realista el precio de una acción, incorporando riesgo sistemático y no sistemático, y heterocedasticidad.

- Estos modelos se puede usar para validar modelos sobre el VaR de portafolios, o para chequear estrategias de conformación de portafolios.

Referencias

1. Glasserman, P. (2004). Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer Verlag, New York, Inc.

2. Matlab. (2002). Garch Toolbox v.2, User’s Manual. The Matworks, Inc. Natick, MA.

3. Ross, S. (2003). Simulación. Prentice-Hall.

4. Hamilton, J.D.(1994) Time Series Analysis, Princeton University Press

5. Gourieroux, Ch. (1997). ARCH Models and Financial Applications. Springer Verlag.

MUCHAS GRACIAS !