

Ph.D. (e),M.Sc.,I.E. Mario Arrieta Paternina, M.Sc. Edgar Arturo Rendón Palacio, Ph.D (e) Rafael Hernán Mira Pérez -Institución Universitaria Pascual Bravo - IUPB

Pazcualino de corazón :)

TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN
CULTURA Y VIDA.

Ph.D. (e),M.Sc.,I.E. Mario Arrieta Paternina,
M.Sc. Edgar Arturo Rendón Palacio, Ph.D (e)
Rafael Hernán Mira Pérez -Institución
Universitaria Pascual Bravo - IUPB

Alcaldía de Medellín

Ph.D. (e),M.Sc.,I.E. Mario Arrieta Paternina, M.Sc. Edgar Arturo Rendón Palacio, Ph.D (e) Rafael Hernán Mira Pérez -Institución Universitaria Pascual Bravo - IUPB

ESTUDIO DE LAS NORMAS VECTORIALES Y MATRICIALES USANDO MATLAB

Grupo de investigación e innovación en Energía – GiiEN, IUPB

Ph.D. (e),M.Sc.,I.E. Mario Arrieta Paternina,
Ph.D (e) Rafael Hernán Mira Pérez –
M.Sc Edgar Arturo Rendón Palacio
Institución Universitaria Pascual Bravo - IUPB

miércoles, 6 de junio de 2012

AGENDA

- Norma Vectorial.
- Norma Matricial.
- Casos de Aplicación.
- Metodología.
- Resultados.

Normas particulares de vectores: dentro de las normas más representativas para los vectores se destacan la norma 1, 2 e ∞, las cuales se definen a continuación:

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$; define la norma-1 de un vector, $\forall x \in \mathbb{C}^n$ (4)

$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$; define la norma-2 de un vector, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, (5)

la ecuación (5) también se puede definir como $\sqrt{x^\tau} x$;

por otro lado (6) muestra que:

$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$; esto es $\sqrt{x^* x}$; $\forall x \in \mathbb{C}^n$ (6)

$\|x\|_\infty = \max|x_i|$; define la norma infinita de un vector, $\forall x \in \mathbb{C}^n$. (7)

Norma-2, también llamada **Norma Euclidiana** de un vector. Por ejemplo, en la Figura 1 se aprecia la forma de calcular la longitud o norma de un vector $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ con la aplicación del teorema de Pitágoras. Lay et al (2011).

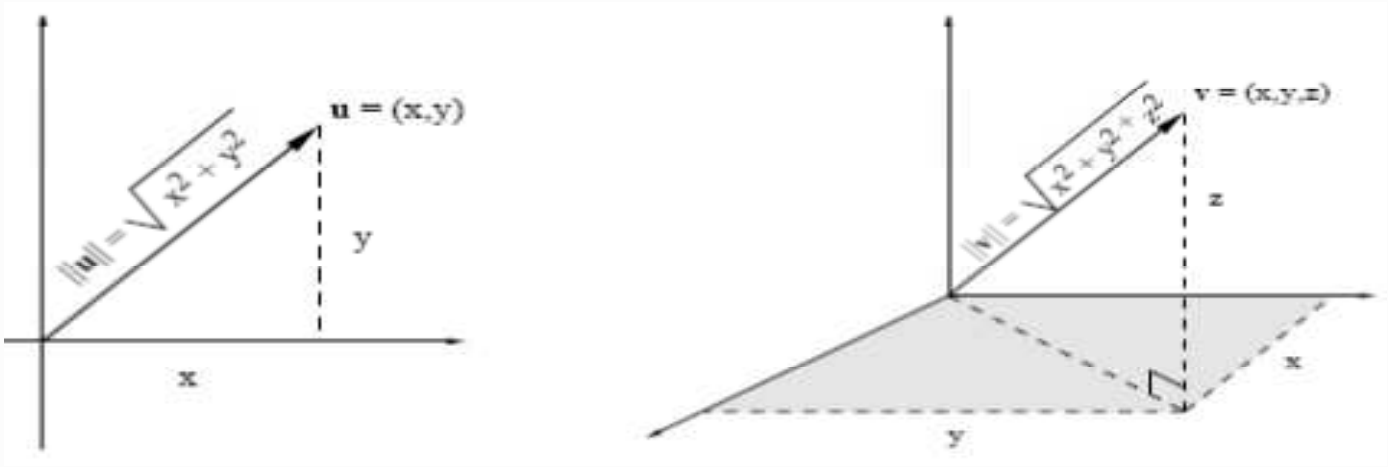


Figura 1. Representación gráfica de la Norma Euclidiana

Normas particulares de matrices: dentro de las normas más representativas para los matrices se destacan la norma 1, 2 e ∞, las cuales se definen en:

$$\|A\|_1 = \max \sum_{1\leq j\leq nj=1}^{m} |a_{ij}|, \text{ define la norma – 1 de una matriz.} \quad (12)$$

$$\|A\|_\infty = \max \sum_{1\leq j\leq mj=1}^{n} |a_{ij}|, \text{ define la norma – } \infty \text{ de una matriz.} \quad (13)$$

$$\|A\| = \frac{\max \|Ax\|}{\|x\|_2}, (\text{Para } A \in \mathbb{C}^{mxn}, x \in \mathbb{C}^{nx1}) \quad (14)$$

Transformaciones Lineales: sea T una transformación lineal (T.L.) o un mapeo de *X* a *Y*, con *X* y *Y* dos espacios vectoriales. Con $x\epsilon X$ y $y\epsilon Y$, si se asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. Entonces, T es una T.L. si satisface (18)

$$(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(x) \qquad (18)$$

La norma – 2 de una matriz, se define por norma inducida, la cual se deriva de la norma de vectores, para este caso se tomará el vector *Ax*, y *x* permitirá definir la norma matricial; cuya característica principal es realizar una transformación lineal para efectuar este cálculo, además la norma – 2 de *x*, debe satisfacer que $\|A\|_1 = 1$. Esto con el objetivo de que la $\|A\|_2$, se determina como se muestra en (15) y (16).

$$\|\mathrm{A}\|_2 \triangleq \sup_{\mathrm{x}\neq 0} \frac{\|\mathrm{Ax}\|}{\|\mathrm{x}\|_2} \tag{15}$$

$$\|\mathrm{A}\|_2 \triangleq \max_{\|\mathrm{x}\|_2=1} \|\mathrm{Ax}\|_2 \tag{16}$$

Otra forma de determinar la norma – 2 de una matriz, es calculando los valores propios de la matriz $A^T A$, con $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y A^T es la matriz transpuesta de A, luego la norma será la raíz cuadrada del máximo de los valores propios del polinomio característico, asociados a dicha matriz.

Norma – 1 de un vector: según el concepto expuesto en preliminares matemáticos, es la suma de los valores absolutos de los elementos pertenecientes a un vector v.

Ejemplo 1: sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v} = [\mathbf{4}, \mathbf{0}, -\mathbf{5}]^{\mathbf{T}}$.

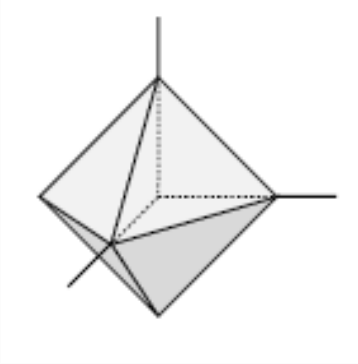
Luego, aplicando el concepto de norma – 1 se tiene que la suma de los valores absolutos de los elementos de v es $\|\mathbf{A}\|_1 = |\mathbf{4}| + |\mathbf{0}| + |-\mathbf{5}| = \mathbf{9}$.

Por otro lado, el conjunto de vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que en particular cumple la condición mostrada en (20)

$$\Phi_P = \{v \| v \|_P = 1\}, P = 1 \qquad (20)$$

Son todos los v, cuyo máximo valor absoluto de sus elementos sea 1, es decir, tengan longitud unitaria y para el caso de $\mathbb{R}^3$ son los mostrados en (21).

$$V = \{[\pm 1, 0, 0], [0, \pm 1, 0], [0, 0, \pm 1]\} \quad (21)$$



Fuente: MEYER et al (2001)

Figura 2. Representación gráfica del conjunto $\boldsymbol{\Phi_P = \{v \| \|v\|_P = 1\}, P = 1}$

Por tanto, la norma – 1 se representa por el conjunto de vectores los cuales se mapean en un octaedro como se muestra en la Figura 2.

Norma – 2 de un vector: según el concepto expuesto en preliminares matemáticos, es la raíz cuadrada de la sumatoria de los cuadrados de los elementos del vector. Lay et al (2011).

Ejemplo 2: Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v} = [\mathbf{4}, \mathbf{0}, \mathbf{-5}]^{\mathbf{T}}$

Retomando el concepto de la norma – 2 se tiene que (22) entrega el resultado siguiente:

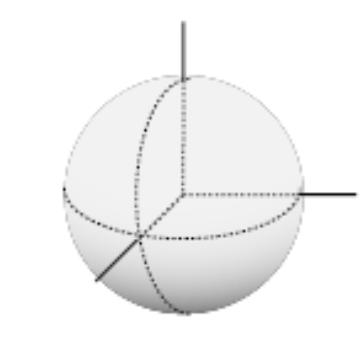
$$\|x\|_2 = \sqrt{(4)^2 + (4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{41} \quad (22)$$

Análogamente a la norma – 1, el conjunto de vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$que en particular cumplen la condición mostrada en la ecuación 23.

$$\Phi_{\mathrm{P}} = \{\mathrm{v} \| \mathrm{v} \|_{\mathrm{P}} = 1\}, \mathrm{P} = 2 \quad (23)$$

Son todos los v, que cumplan con $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{x})^2 + (\mathbf{y})^2 + (\mathbf{z})^2} = \mathbf{1}$, es decir, tengan longitud unitaria y para el caso de $\mathbb{R}^3$ son todos aquellos que describen (24).

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 = 1} \quad (24)$$



Fuente: MEYER et al (2001)

Figura 3. Representación gráfica del conjunto $\boldsymbol{\Phi_P = \{x \| \|x\|_P = 1\}, P = 2}$

Por consiguiente, la norma – 2 se representa por el conjunto de vectores los cuales se mapean en una esfera como se muestra en la Figura 3. Lay et al (2011).

Norma – ∞ de un vector: según el concepto expuesto en principios matemáticos, es el elemento perteneciente a un vector v cuyo valor absoluto es el máximo. Lay et al (2011).

Ejemplo 3: Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v} = [\mathbf{4}, \mathbf{0}, -\mathbf{5}]^{\mathbf{T}}$

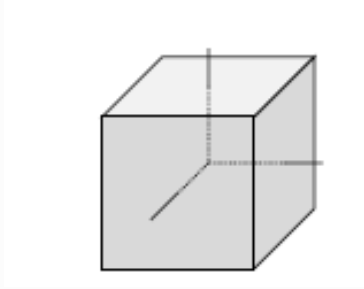
Luego, aplicando el concepto de norma – ∞ se tiene que el máximo del valor absoluto de los elementos de v es $\|\mathbf{v}\|_\infty = \mathbf{max}[|\mathbf{4}|, |\mathbf{0}|, |-\mathbf{5}|] = \mathbf{5}$.

$$\mathbf{\Phi_P} = \{\mathbf{v} \| \mathbf{v}\|_\mathbf{P} = \mathbf{1}\}, \mathbf{P} = \infty \qquad (25)$$

Por otro lado, el conjunto de vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$que en particular cumple la condición descrita en (25) son todos los *v*, cuyo máximo valor absoluto de sus elementos sea 1, es decir, tengan longitud unitaria y para el caso de $\mathbb{R}^3$ son:

$\mathbf{V} =$

$\{[\pm\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}], [\mathbf{0}, \pm\mathbf{1}, \mathbf{0}], [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \pm\mathbf{1}], [\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{1}], [\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{1}, \mathbf{0}], [\pm\mathbf{1}, \mathbf{0}, \pm\mathbf{1}], [\mathbf{0}, \pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{1}]\}$



Fuente: MEYER et al (2001)

Figura 4. Representación gráfica del conjunto $\boldsymbol{\Phi_P = \{v \| \|v\|_P = 1\}, P = \infty}$

Por tanto, la norma – ∞ representada por el conjunto de vectores, los cuales se mapean en un cubo como se muestra en la Figura 4. Lay et al (2011).

Norma – 1 de una matriz: según el concepto expuesto en preliminares matemáticos, es el máximo de los valores absolutos de la suma de las columnas de una matriz.

Ejemplo 4: Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{mxn}}$, con $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{8}} \end{bmatrix}$, al aplicar el concepto se tiene en (27):

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \mathbf{max}\left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}(|\mathbf{3}| + |\mathbf{0}| + |\mathbf{-1}| + \left|\sqrt{\mathbf{8}}\right|)\right] \approx \mathbf{max}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{3,0;3,83})\right] \approx \mathbf{2,23.} \quad (27).$$

Norma – 2 de una matriz:, es la raíz cuadrada del máximo de los valores propios asociados al polinomio característico obtenido de hacer la matriz $\mathbf{A^T A - \lambda I}$ singular, es decir, $\mathbf{det(A^T A - \lambda I) = 0}$, con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{mxn}}$ los valores propios de $\mathbf{A^T A}$. El polinomio característico se halla al multiplicar los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante al aplicar el proceso de eliminación gaussiana por escalonamiento a la matriz $\mathbf{A^T A - \lambda I}$, y sus valores propios se determinan haciendo cero tal polinomio, es decir calculando sus raíces. Lay et al (2011).

Ejemplo 5: Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{mxn}}$, con $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{8}} \end{bmatrix}$, al aplicar el concepto se tiene en (28):

$$\mathbf{A^T A - \lambda I} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{3}} \end{bmatrix} * \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \sqrt{\mathbf{8}} \end{bmatrix} - \boldsymbol{\lambda} * \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \therefore \mathbf{A^T A - \lambda I} = \begin{bmatrix} \mathbf{3 - \lambda} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3 - \lambda} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Para obtener el polinomio característico se debe diagonalizar la matriz $\mathbf{A^T A - \lambda I}$, lo que se obtiene a través de un proceso de eliminación gaussiana $(\mathbf{A^T A - \lambda I}) \longrightarrow \mathbf{U}$, mostrado en (29)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{3-\lambda} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1+(3-\lambda)^2} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Luego, se muestra que U es singular $\mathbf{det(U) = 0}$ y se encuentra el polinomio característico asociado a $(\mathbf{A^T A - \lambda I})$ y se iguala a cero, es decir $\mathbf{-1 * (-1 + (3-\lambda)^2) = 0}$, entonces, las raíces del polinomio son $\boldsymbol{\lambda = 2, \wedge \lambda = 4}$, así $\boldsymbol{\lambda_{min} = 2, \wedge, 2, \wedge \lambda_{max} = 4}$.

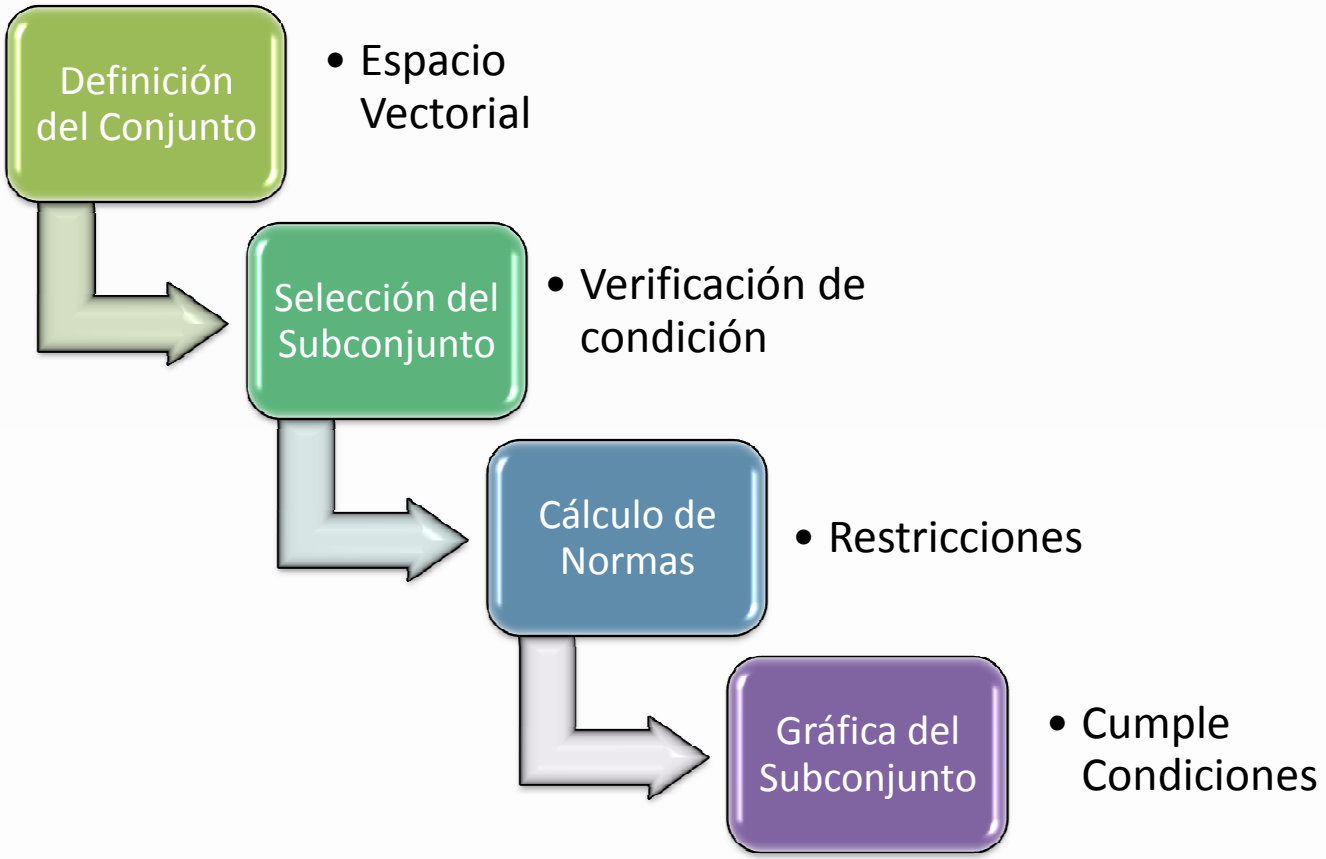
Siguiendo con la definición de norma – 2 para matrices se tiene en (30):

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{\lambda_{max}}} = \sqrt{\mathbf{4}} = \mathbf{2} \tag{30}$$

Norma – ∞ de una matriz: es el máximo de los valores absolutos de la suma de las filas de una matriz. Lay et al (2011).

Ejemplo 6: sea, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{mxn}}$ con $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{8}} \end{bmatrix}$, al aplicar el concepto se tiene en (31):

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \mathbf{max}\left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}(|\mathbf{3}| + |\mathbf{-1}|; |\mathbf{0}| + |\sqrt{\mathbf{8}}|)\right] \approx \mathbf{max}\left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}(\mathbf{4}, \mathbf{0}; \mathbf{2}, \mathbf{83})\right] \approx \mathbf{2}, \mathbf{31}. \quad (31)$$


Definición del Conjunto
• Espacio Vectorial
Selección del Subconjunto
• Verificación de condición
Cálculo de Normas
• Restricciones
Gráfica del Subconjunto
• Cumple Condiciones

Representación Gráfica de la Norma – 1: en la Figura 5. Se observa de forma gráfica uno de los subconjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$, en el cual se cumple que la Norma – 1 de todos sus elementos es igual a 1. La que denota un Octaedro, según lo propuesto en análisis del problema.

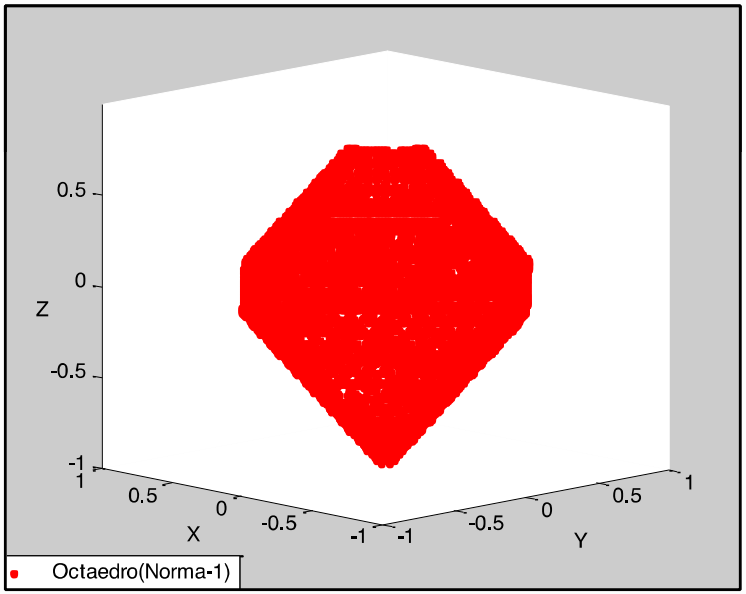


Figura 5. Representación gráfica de un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, con Norma – 1 igual a 1.

Representación Gráfica de la Norma – 2: en la Figura 6 se observa de forma gráfica uno de los subconjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$, en el cual se cumple que la Norma –2 de todos sus elementos es igual a 1. La que denota una esfera, según lo propuesto en el análisis del problema.

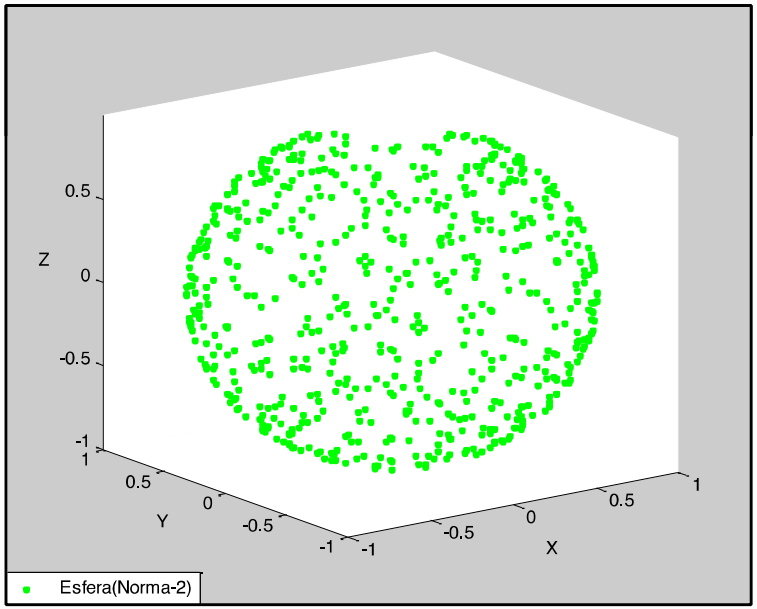


Figura 6. Representación gráfica de un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, con Norma – 2 igual a 1.

Representación Gráfica de la Norma – ∞**:** en la Figura 7. Se observa de forma gráfica uno de los subconjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$, en el cual se cumple que la Norma $-\infty$ de todos sus elementos es igual a 1. La que denota un Cubo, según lo propuesto en el análisis del problema**.**

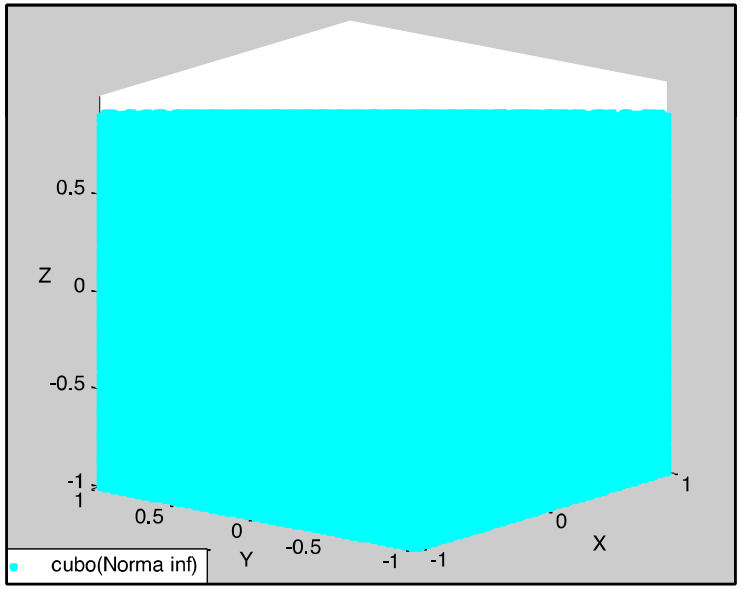


Figura 7. Representación gráfica de un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, con Norma – ∞ igual a 1.

Representación Gráfica de las Normas de Vectores: en la Figura 8 se observa de forma gráfica los tres subconjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$, en los cuales se cumple que la Norma 1, 2 e ∞ de todos sus elementos es igual a 1. La que denota la TRIADA de MAPED, según lo propuesto en el análisis del problema.

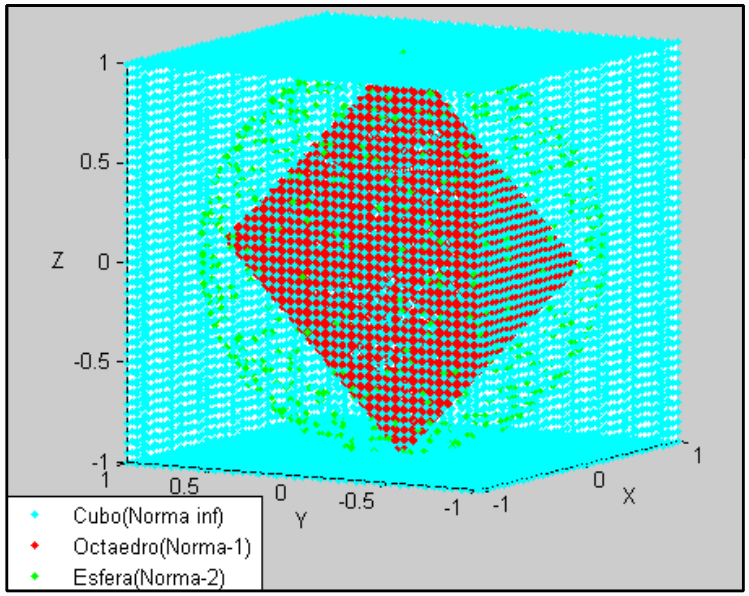


Figura 8. Representación gráfica de la TRIADA de MAPED de un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, con Norma 1, 2, e ∞ iguales a 1.

Representación Gráfica de la Norma – 2: en la figura 9 se observa de forma gráfica la Norma – 2 de una matriz A, particular perteneciente a $\mathbb{R}^{3x3}$, obtenida a partir del concepto de norma inducida. Queda para verificación del lector que el máximo y el mínimo valor singular de la matriz A^TA, son los ejes mayor y menor del elipsoide, respectivamente.

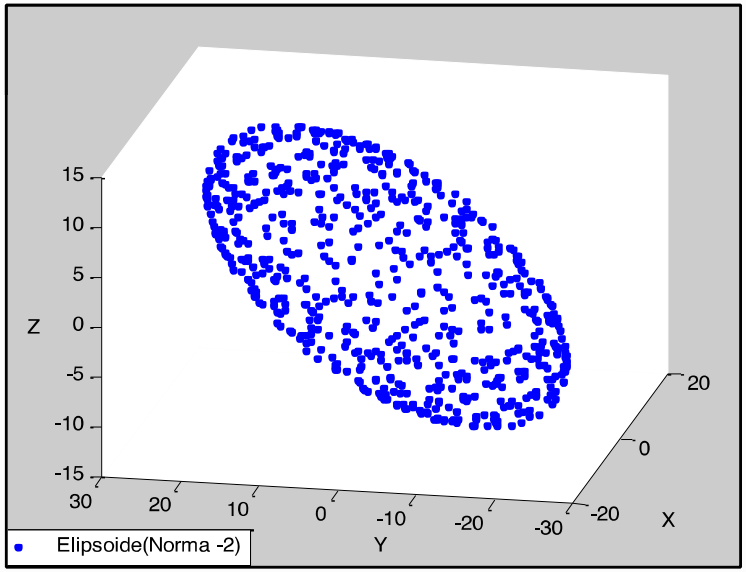


Figura 9. Representación gráfica de la Norma - 2 para una matriz particular de $\mathbb{R}^{3x3}$.

For your attention, Thanks!

Contact:
E-mail: mario.arrieta@pascualbravo.edu.co
Cell Phone: +57 315 290 04 74
E-mail: rafael.mira@pascualbravo.edu.co
Cell Phone: +57 310 468 28 19

GRACIAS

Pazcualino de corazón :)

Ph.D. (e),M.Sc.,I.E. Mario Arrieta Paternina, M.Sc. Edgar Arturo Rendón Palacio, Ph.D (e) Rafael Hernán Mira Pérez -Institución Universitaria Pascual Bravo - IUPB