Modelaje y Simulación de un Sistema Mecánico de Traslación

Iván Darío Mora Orozco

ivan.mora@upb.edu.co

Universidad Pontificia Bolivariana

Contenido

- ***Objetivos***
- ***Características y parámetros del sistema mecánico***
- ***Modelo Matemático***
  - ***Variables a lo largo.***
  - ***Variables a través.***
  - ***Parámetros***
- ***Simplificaciones en el planteamiento del modelo***
- ***Modelo Matemático***
  - ***Ecuaciones de equilibrio.***
  - ***Ecuaciones de compatibilidad***
  - ***Ecuaciones descriptivas***
- ***Modelo matemático en ecuación diferencial***
- ***Modelo matemático en función de transferencia***
- ***Cálculo de los parámetros del sistema***
- ***Respuesta del sistema ante una entrada escalón***

Contenido

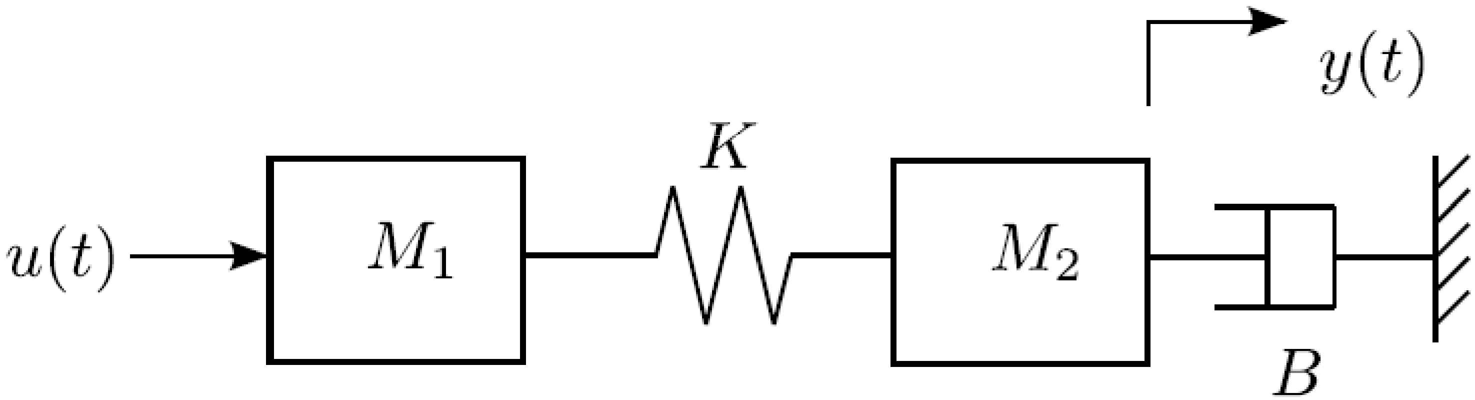
- *Cálculo de la respuesta al escalón con transformada inversa de Laplace*
- *Modelo matemático en variables de estado*
  - *Ecuaciones de estado y de salida*
  - *Forma matricial de las ecuaciones de estado*
  - *De la función de transferencia a la forma matricial*
- *Respuesta del sistema usando ODE45*
- *Respuesta del sistema usando el comando lsim*
- **Análisis de la respuesta en frecuencia: diagramas de Bode**
- **Modelo matemático representado en diagramas de bloques**
  - **Implementación en simulink**
  - **Verificación de la respuesta**
- **Referencias bibliográficas**
- **Conclusiones**

Objetivos:

- Obtener el modelo matemático de un sistema mecánico de traslación, lineal e invariante de orden superior.
- Implementar en *Matlab* y *Simulink* diferentes métodos de simulación para analizar el comportamiento del sistema a partir del modelo obtenido.

Sistema Mecánico de Traslación

Características y parámetros del sistema mecánico



$u(t)$ ***fuerza y*** $y(t)$ ***velocidad***

Sistema Mecánico de Traslación

Variables a lo largo – Variables a través.

variable a través: fuerza $[=]\ Newton = \dfrac{Kgm}{s^2}$

variable a lo largo: velocidad $[=]\ \dfrac{m}{s}$

Parámetros

Resorte $K[=]\dfrac{Kg}{s^2}$ **Amortiguador** $B[=]\dfrac{Kg}{s}$ **Masa** $M[=]\,Kg$

Modelo Matemático

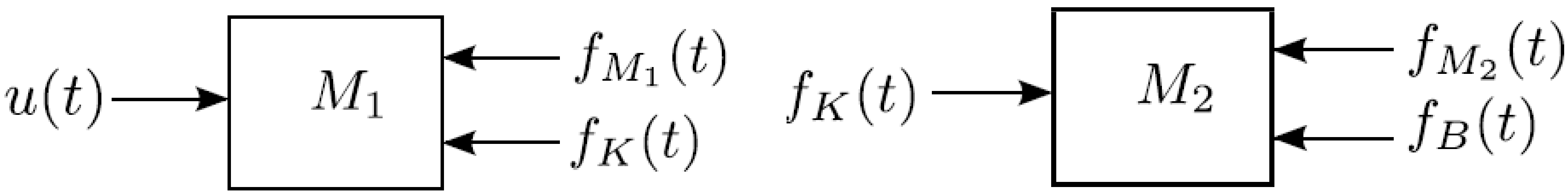
Simplificaciones en el planteamiento del modelo.

- **En este trabajo se obtiene el modelo matemático lineal e invariante, de parámetros concentrados, de un sistema mecánico de traslación de segundo orden con componentes de masa, resorte y amortiguador. El modelo se simplifica considerando movimiento únicamente en un plano y la ecuación diferencial del modelo se obtiene aplicando leyes físicas para plantear una ecuación de equilibrio dinámico de fuerzas que incluyen la fuerza inercial que presenta una masa a ser desplazada.**
- **El análisis de este tipo de sistemas dinámicos que se representan con este tipo de ecuaciones es muy común en cursos como Sistemas y Señales de Tiempo Continuo y Sistemas Automáticos de Control. Para poder aplicar técnicas clásicas de control automático, se debe tener el modelo del sistema**

Modelo Matemático

Ecuaciones de equilibrio.

Son relaciones de variables a través



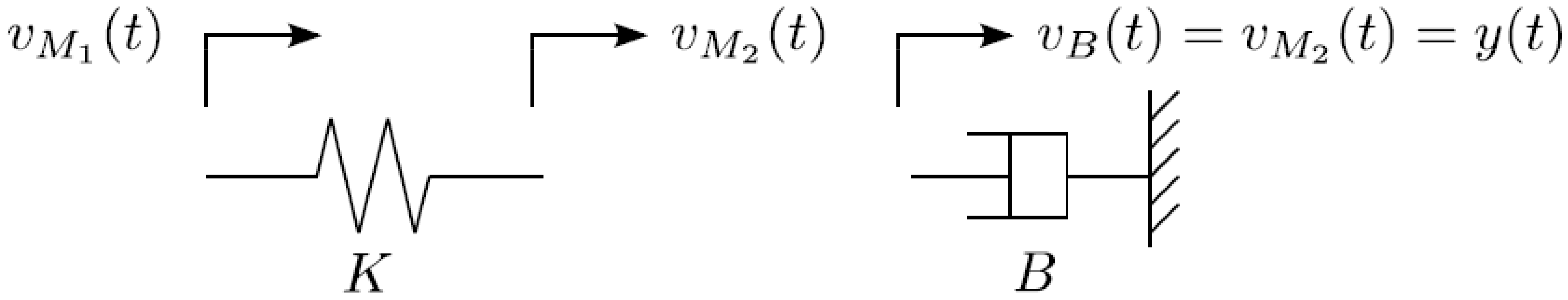
$$x(t) - f_{M_1}(t) - f_K(t) = 0 \qquad f_K(t) - f_B(t) - f_{M_2}(t) = 0$$

$f_M(t)$ **representa la inercia de la masa a ser movida**

Modelo Matemático

Ecuaciones de compatibilidad.

Son relaciones de variables a lo largo



$$v_K(t) = v_{M_1}(t) - v_{M_2}(t) \qquad v_B(t) = v_{M_2}(t) = y(t)$$

el resorte presenta una velocidad relativa

Modelo Matemático

Ecuaciones descriptivas

Relacionan variables a lo largo y a través

$$f_K(t) = K\int_{-\infty}^{t} v_K(\lambda)d\lambda \qquad v_K(t) = \frac{1}{K}\frac{df_K(t)}{dt}$$

$$f_B(t) = Kv_B(t) \qquad v_B(t) = \frac{1}{B}f_B(t)$$

$$f_M(t) = M\frac{df_M(t)}{dt} \qquad v_M(t) = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t} f_M(\lambda)d\lambda$$

Modelo Matemático

Representado en ecuación diferencial.

$$\left(D^3 + \frac{B}{M_2} D^2 + \frac{K(M_1 + M_2)}{M_1 M_2} D + \frac{KB}{M_1 M_2}\right) y(t) = \frac{K}{M_1 M_2} u(t)$$

Sistema de orden 3
3 elementos que almacenan energía

Los elementos mecánicos que almacenan energía:
Masas y resortes

Modelo Matemático

Obtención de la ecuación diferencial con Matlab

```
syms M1 M2 K B xt yt VM1 VM2 VK VB D

ecn1= (M1*D*VM1)+ (K*((1/D)*VK))-xt;
ecn2= (B*VB)+ (M2*D*VM2)-(K*(1/D)*VK);
ecn3= VM1-VM2-VK;
ecn4= VM2-yt;
ecn5= yt-VB;
s=solve(ecn1,ecn2,ecn3,ecn4,ecn5,Yt,VM1,VM2,VK,VB);
a=s.Yt
f=simplify(a);
pretty(f)
```

Modelo Matemático

Representado en función de transferencia.

$$H(s)=\frac{\dfrac{K}{M_1 M_2}}{s^3+\dfrac{B}{M_2}s^2+\dfrac{K\left(M_1+M_2\right)}{M_1 M_2}s+\dfrac{KB}{M_1 M_2}}$$

dependiendo de los valores de los parámetros

se tienen diferentes tipos de respuestas

Modelado matemático

Cálculo de los valores de los parámetros con Matlab

```
syms K B M1 M2
ecn1=B-1
ecn2=(B/M2)-3
ecn3=((K*(M1+M2))/(M1*M2))-4
ecn4=K*B/(M1*M2)-2
s=solve(ecn1,ecn2,ecn3,ecn4,B,M1,M2,K);
b=s.B
m1=s.M1
m2=s.M2
k=s.K
```

b=1 m1= 5/3 m2=1/3 k=10/9

Modelado matemático

Reemplazando los valores de los parámetros

$$H(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

Obtención de la función de transferencia con Matlab

```
num=[0 2];
den=[1 3 4 2];
sys=tf(num,den)
```

Cálculo de las raíces de la ecuación característica con Matlab

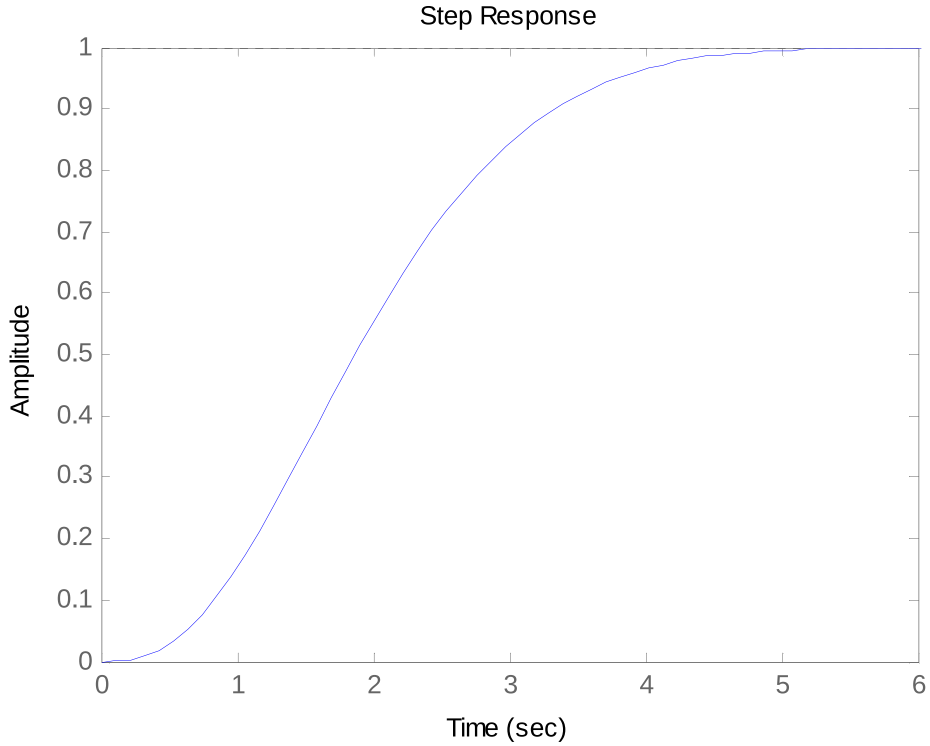
roots(den)

ans = -1.0000 + 1.0000i -1.0000 - 1.0000i
-1.0000

Respuesta del sistema

Respuesta del sistema ante una entrada escalón con Matlab

step(sys)



Respuesta del sistema

Respuesta del sistema ante una entrada escalón calculando transformada inversa de Laplace con Matlab

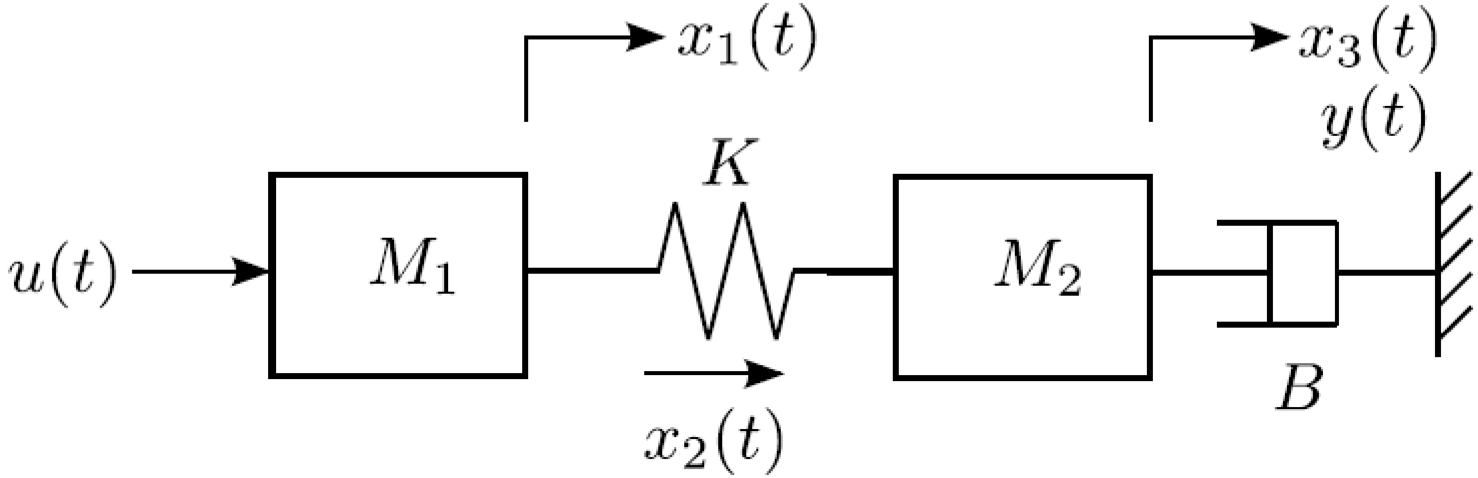
```
syms s yt
Hs=2/((s^3)+(3*(s^2))+(4*s)+2)
Ys=(2/((s^3)+(3*(s^2))+(4*s)+2))*(1/s)
yt=ilaplace(Ys)

yt = 1+exp(-t)*(cos(t)-sin(t))-2*exp(-t)
```

para graficar la y(t) calculada con Matlab

```
t=[0:0.01:3];
Yt=eval(yt);
plot(t,Yt)
```

Modelo Matemático

Representado en variables de estado.



Se eligen como variables de estado

Velocidades en las masas

Fuerzas en los resortes

Modelo Matemático

Ecuaciones de estado y de salida.

$$y(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{M_1} x_2(t) + \frac{1}{M_1} u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = Kx_1(t) - Kx_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{1}{M_2} x_2(t) - \frac{B}{M_2} x_3(t)$$

Modelo Matemático

Forma matricial de las *ecuaciones de estado y de salida.*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{M_1} & 0 \\ K & 0 & -K \\ 0 & \dfrac{1}{M_2} & -\dfrac{B}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u(t)]$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [0][u(t)]$$

Modelo Matemático

Forma matricial de las *ecuaciones de estado y de salida con valores.*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{10}{9} & 0 & -\frac{10}{9} \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u(t)]$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [0][u(t)]$$

Modelo Matemático

Forma matricial de las e*cuaciones de estado y de salida con Matlab.*

```
num=[0 2];
den=[1 3 4 2];
sys=tf(num,den)
[A, B, C, D]=tf2ss(num,den)
```

$$A = \begin{matrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad C = \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \end{matrix} \qquad D = 0$$

La representación en espacio de estado no es única

Respuesta del sistema

Respuesta del sistema usando ODE45 de Matlab
La representación se hace en espacio de estado

Se implementa una función con ecuaciones en primera derivada

```
function dxdt=Fn_sistema(t,x)
B=1;  M1=5/3;  M2=1/3;  K=10/9;  u=1;
dxdt1=-(1/M1)*x(2)+(1/M1)*u;
dxdt2=K*(x(1)-x(3));
dxdt3=(1/M2)*x(2)-(B/M2)*x(3);
dxdt=[dxdt1 dxdt2 dxdt3]';
```

Respuesta del sistema

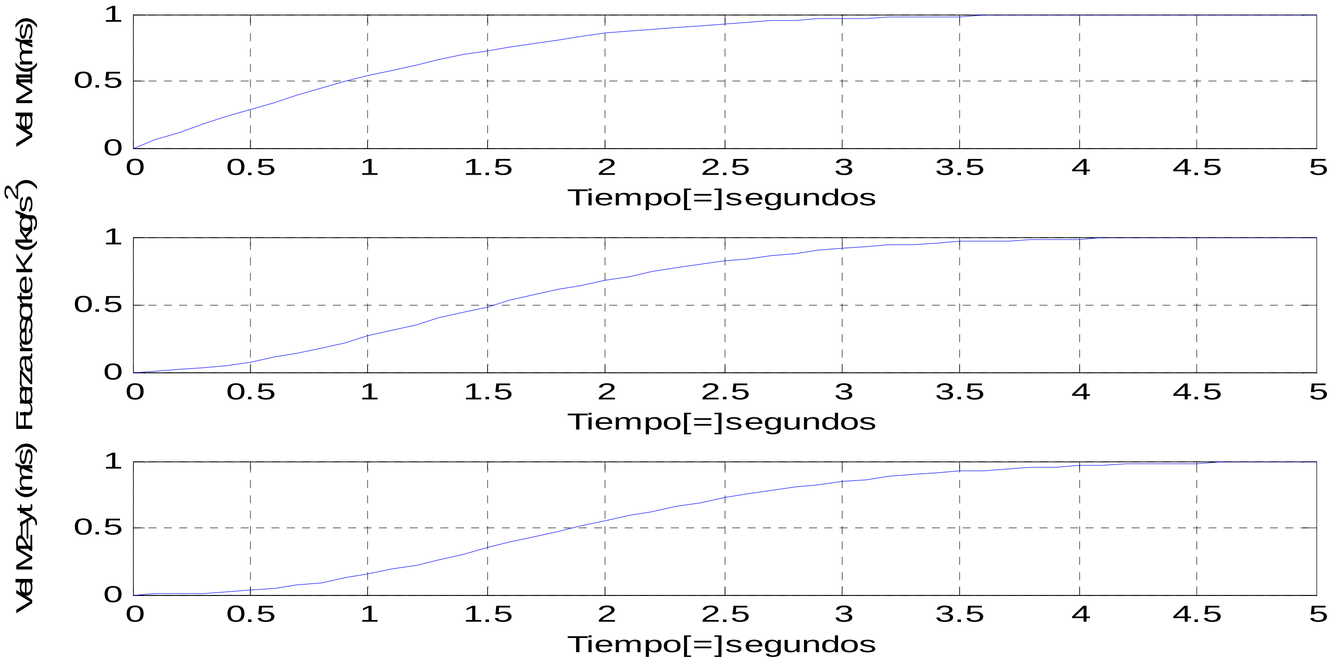
Respuesta del sistema usando ODE45 de Matlab

Se invoca la función que ya se diseñó

```
tf=0:0.1:5;   x0=[0 0 0];
[t,x]=ode45('Fn_p3',tf,x0);
subplot(311), plot(t,x(:,1));    grid on
xlabel('Tiempo[=]segundos');  ylabel('Vel M1(m/s)');
subplot(312), plot(t,x(:,2));  grid on
xlabel('Tiempo[=]segundos');  ylabel('Fuerza resorte K (kg/s^2)');
subplot(313), plot(t,x(:,3));  grid on
xlabel('Tiempo[=]segundos');  ylabel('Vel M2=yt (m/s)');
```

Respuesta del sistema

Resultados con el comando 0DE 45



Respuesta del sistema

Respuesta del sistema ante una entrada sinusoidal con Matlab

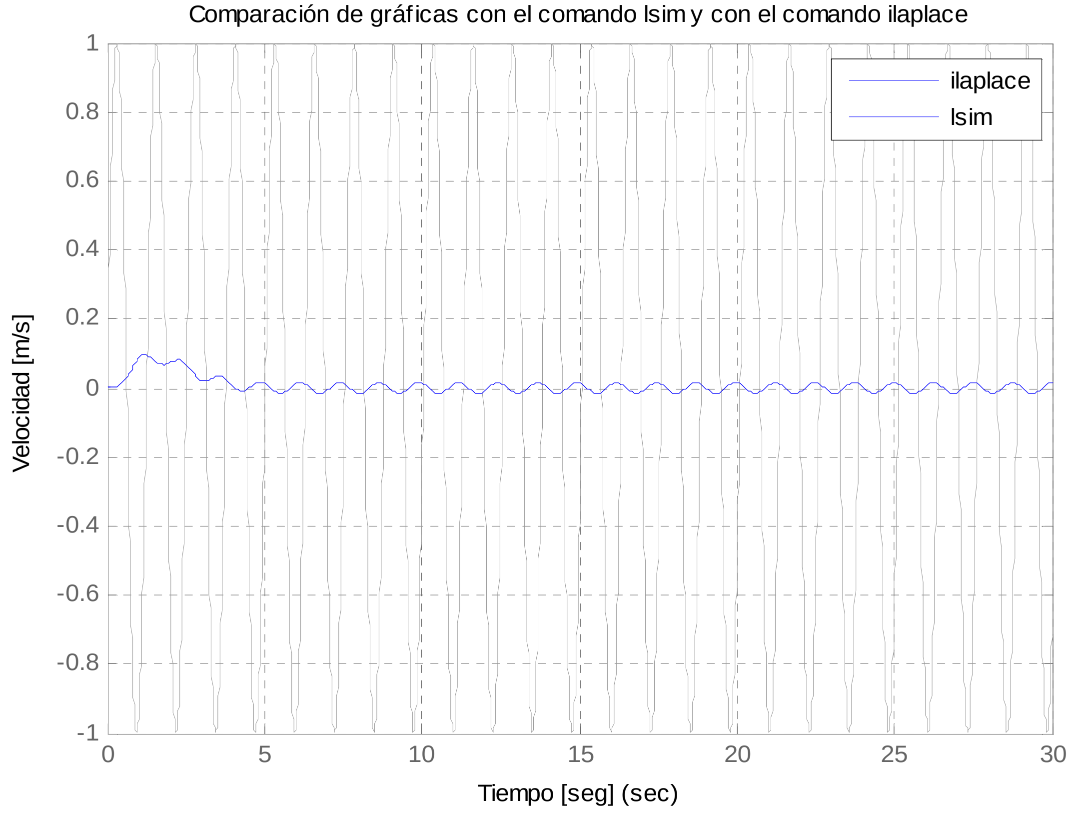
```
syms s yt
 Hs=2/((s^3)+(3*(s^2))+(4*s)+2)
% respuesta ante una entrada sinusoidal de amplitud 1 y frecuencia 5
Ys=(2/((s^3)+(3*(s^2))+(4*s)+2))*(5/(s^2+25))
yt=ilaplace(Ys)
pretty(yt)
yt = 105/8177*cos(5*t)-73/8177*sin(5*t)+5/8177*(629-650*cos(t)+52*sin(t))*exp(-t)
```

para graficar la y(t) calculada con Matlab

```
t=[0:0.01:3];
Yt=eval(yt);
plot(t,Yt)
```

Resultados en Matlab

Respuesta del sistema ante una entrada sinusoidal con Matlab



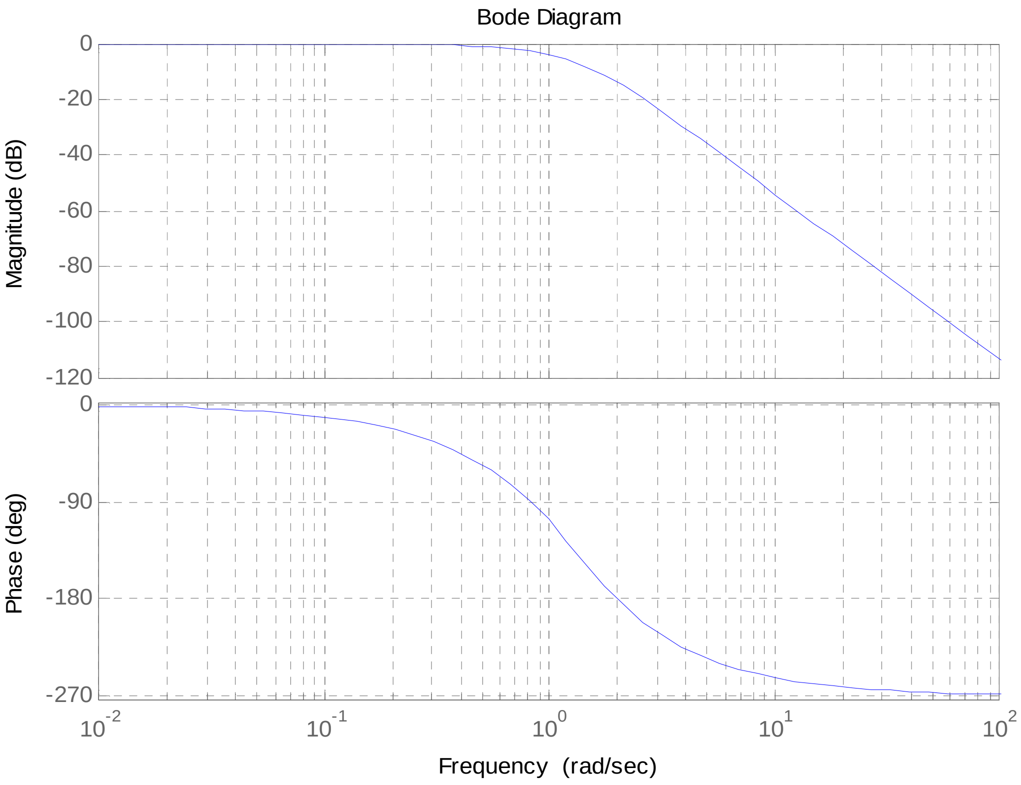
Modelaje y Simulación

de un Sistema Mecánico de Traslación

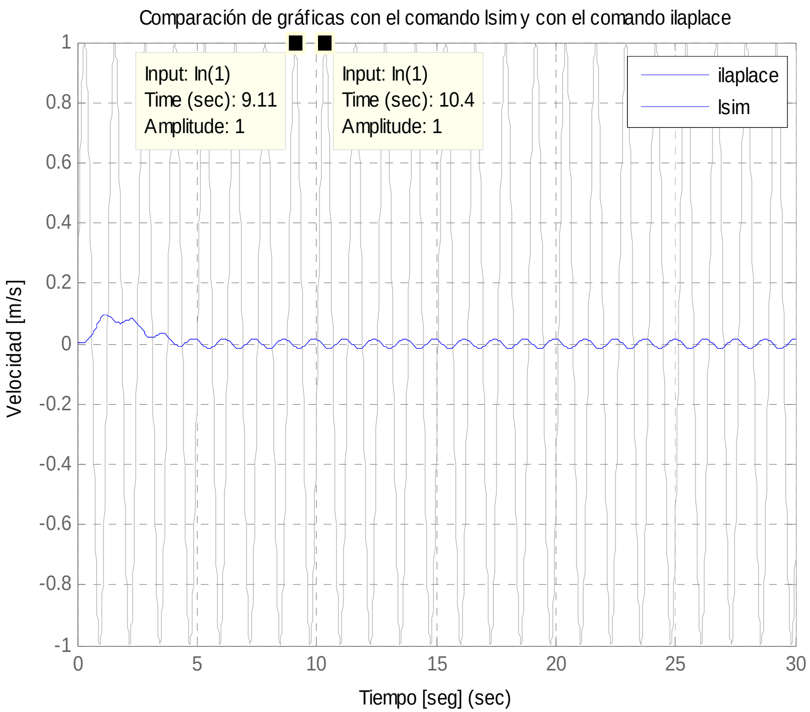
Análisis de la respuesta en frecuencia en Matlab

Diagramas de Bode con Matlab

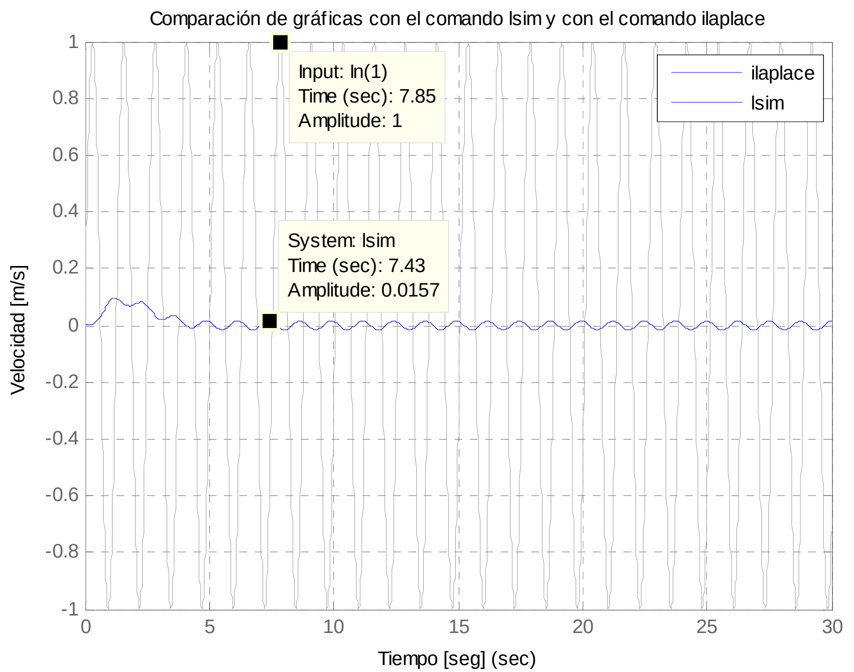
```
num=[0 0 0 2];
den=[1 3 4 2];
sys=tf(num,den)
bode(sys)
grid on
```



Cálculo de magnitud y fase desde la respuesta en el tiempo



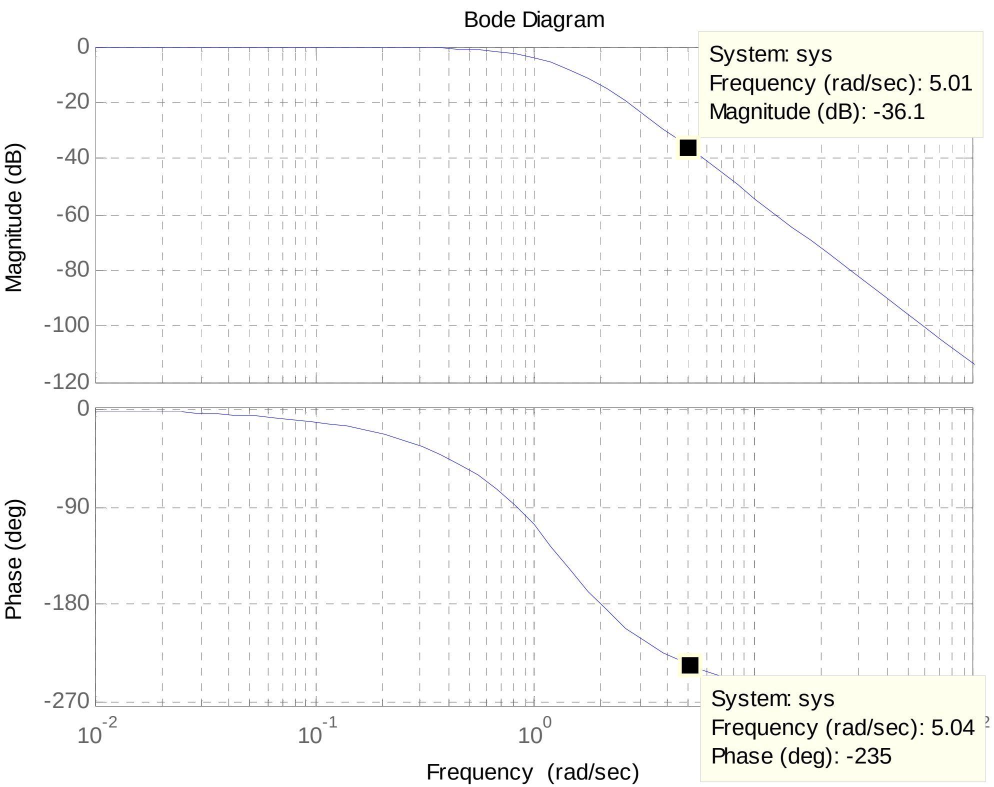
$$T = T_2 - T_1 = 10.4 - 9.11 = 1.29\ s$$



$$T_\varphi = T_{\varphi_1} - T_{\varphi_2} = 7.85 - 7.43 = 0.42$$

$$\varphi = \frac{T_\varphi * 360}{T} = \frac{0.42 * 360}{1.29} = 117.20$$

Verificación *de magnitud y fase desde diagramas de Bode*



$$k = 10^{c/20} = 0.0153$$

Modelo Matemático

Representado en diagrama de bloques.

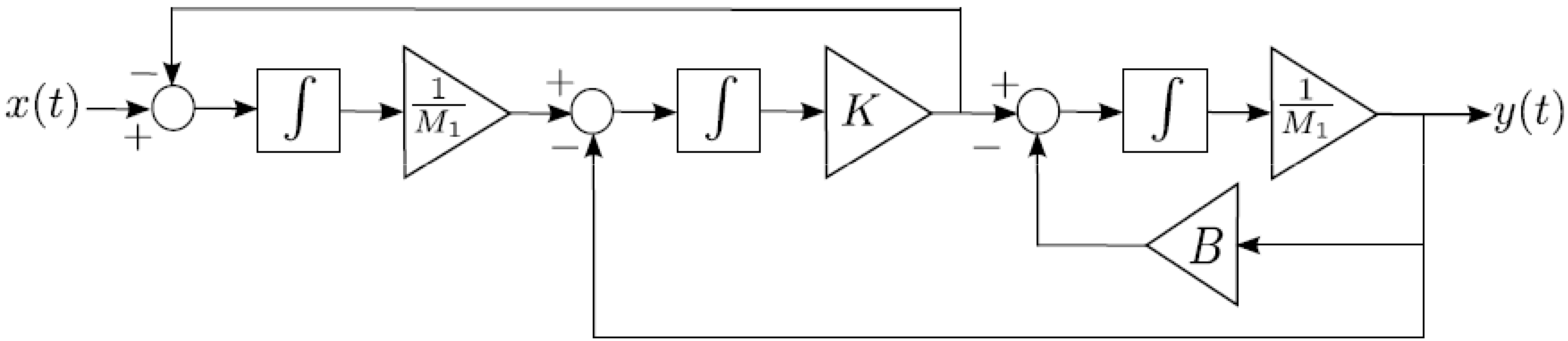
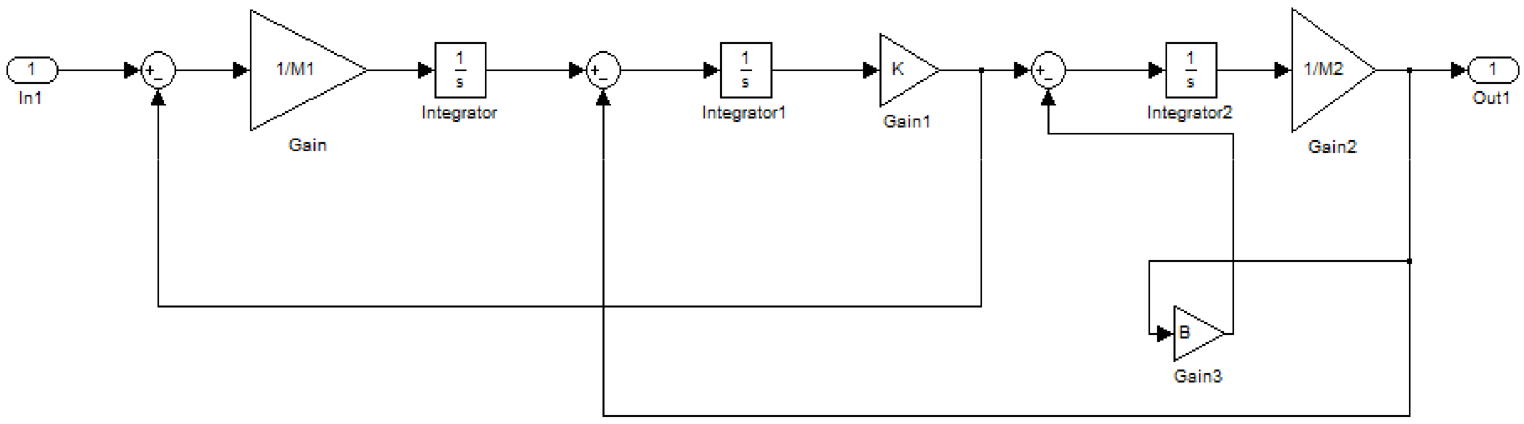


diagrama se implementa a partir de las ecuaciones ya planteadas

Modelo Matemático

Implementación del diagrama de bloques en simulink

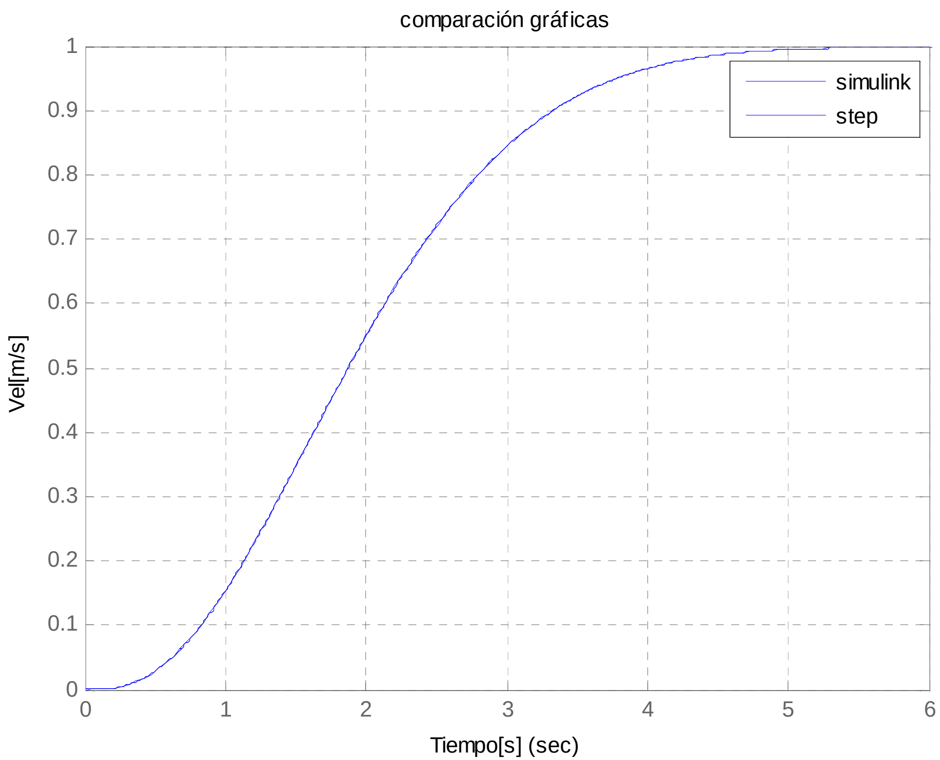


Modelaje y Simulación

de un Sistema Mecánico de Traslación

Modelo Matemático

Respuesta del sistema desde el diagrama de bloques en simulink



Conclusiones

•El modelo obtenido del sistema mecánico de traslación es un modelo simplificado para el caso lineal, invariante y de parámetros concentrados y limitado al movimiento en un solo plano, pero es un modelo que muestra el comportamiento de un sistema real equivalente de manera muy aceptable.

•La simulación es muy importante porque permite verificar la validez del modelo y evaluar el comportamiento del sistema a partir de la forma gráfica de las respuestas.

- La disponibilidad actual de simuladores como Matlab y Simulink permite implementar la solución numérica de cálculos que son laboriosos de resolver en forma analítica.

Referencias bibliográficas

- Pérez César. Matlab y sus Aplicaciones en las ciencias y la Ingeniería. Prentice Hall 2002. 610p. ISBN: 0-471-37145-9