

“ESTUDIO DEL MODELO BOOLEANO: SIMULACIÓN DE IMÁGENES Y EXTRACCIÓN DE PARÁMETROS”

Autores

* Jorge Orrego Gaviria: Director del proyecto

** Jairo Pertuz Campo: Co - Investigador

RESUMEN

La ponencia que presentamos a continuación contiene resultados de un proyecto investigativo ejecutado por los autores en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia. El proyecto estuvo financiado por el Centro de Investigaciones Ambientales de esta Facultad (el CIA), el cual está registrado en el Sistema de Investigación Universitario de la Universidad de Antioquia.

El proyecto tiene como objetivo particular, profundizar en el conocimiento de modelos probabilísticos aplicados al campo de la informática.

El análisis de imágenes digitales se ha convertido en un campo de la ingeniería y de la informática. Tanto las imágenes satelitales sobre distribución de recursos naturales, al igual que las imágenes microscópicas de material biológico o de secciones de metales, como también tomografías digitales, etc., son apenas unos cuantos ejemplos de las innumerables aplicaciones actuales.

Muchas veces las imágenes exhiben rasgos aleatorios, bien sea en las formas o en las texturas, las que a su vez son susceptibles de interpretarse mediante modelos estadísticos paramétricos, como es

el caso de nuestro modelo Booleano.

Por otro lado, en muchas aplicaciones en computación gráfica se requiere imitar imágenes texturadas o de fondos naturales, como el mármol, la madera, la vegetación, etc. Cuando estas imágenes se producen por modelos probabilísticos, resultan ser más livianas y apropiadas, por cuanto imitan el aspecto aleatorio de los temas originales que sustituyen.

La simulación y análisis de imágenes digitales desde la perspectiva de los métodos estadísticos, constituye una disciplina que debe estimularse en las actividades de investigación y docencia y cada vez se abre paso en los medios empresariales. En nuestro trabajo hacemos uso de un buen número de implementaciones computacionales desarrolladas en Matlab, mediante la simulación de los modelos estadísticos que generan imágenes del modelo booleano. El patrón de puntos asumido en estas imágenes es un proceso de puntos de Poisson, mientras que el grano típico es asumido según una figura geométrica rígida como un círculo, un triángulo equilátero o un rectángulo, cuyas dimensiones obedecen a distribuciones estadísticas.

Desde el punto de vista matemático, las imágenes consideradas son conjuntos aleatorios desplegados en un plano. Por lo tanto, son impresiones de un espacio probabilístico cuya descripción puede modelarse y cuyos parámetros pueden estimarse.

El modelo Booleano (también conocido como modelo poissoniano de gérmenes y granos) es un ejemplo importante y relativamente simple de conjuntos aleatorios en el plano. Es además flexible y admite muchas variantes, y bajo consideraciones adecuadas puede definirse constructivamente. Seguidamente presentamos una descripción amplia pero breve, de nuestro problema en consideración.

Sea N un proceso bidimensional de Poisson con intensidad λ , en donde la impresión de éste modelo consiste en puntos, que también llamaremos gérmenes. Sea X_n , $n=1,2,\dots$, una secuencia independiente de conjuntos compactos aleatorios (que por ejemplo podrían ser círculos). Cada punto del proceso N lo consideramos el centro del correspondiente círculo, o conjunto compacto aleatorio perteneciente a la secuencia.

Los conjuntos X_n , $n=1,2,\dots$ son independientes e idénticamente distribuidos. Sea X_0 un conjunto aleatorio compacto con la misma distribución de la secuencia X_n , el cual llamamos grano típico.

Siempre asumiremos que su área esperada:

$$\bar{A} = E(A(X_0)) \text{ es finita.}$$

Lo cual también implica la finitud de su perímetro esperado, o sea:

$$\bar{U} = E(U(X_0)) \text{ es finito.}$$

El modelo Booleano es la unión de los gérmenes x_n y los granos X_n :

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X_i + x_i)$$

El conjunto así definido es, en el sentido de la teoría de los conjuntos aleatorios, homogéneo (o estacionario). Si X_0 es isotrópico (como en el caso de discos), X también es isotrópico.

La estacionalidad de X implica que su distribución probabilística no se altera en presencia de traslaciones. Por lo tanto, resulta igual fijar el origen de coordenadas en cualquier punto del plano. El modelo Booleano es importante desde tres puntos de vista, en la interpretación de las imágenes:

Primero, ofrece una descripción detallada de la imagen del conjunto aleatorio estudiado, por medio de la intensidad λ del proceso de gérmenes y de las características del grano típico. Segundo, es posible que las suposiciones del modelo Booleano puedan sugerir el proceso de formación de la estructura. Tercero, las fórmulas disponibles en el modelo Booleano pueden ser utilizadas para estimar los parámetros que no podrían obtenerse por medición directa de las imágenes.

Los granos del modelo Booleano podrían no ser conjuntos compactos (aunque el caso convexo ha sido el más estudiado). Un caso especial de granos no convexos ocurre

cuando el grano está constituido por conjuntos finitos de puntos, en forma de cluster, como en el denominado campo de Neyman-Scott.

Los parámetros del modelo Booleano de granos convexos pueden ser estimados por varios métodos. Particularmente en nuestro proyecto, emplearemos el método de las intensidades, el cual ha resultado ser el más difundido en la literatura.

Tengamos presente los siguientes parámetros poblacionales:

$A_A = p$ es el porcentaje de la imagen que está vacía o en blanco.

L_A = longitud promedio del contorno por unidad de área

N_A^+ = Número promedio de puntos de tangencia horizontal por unidad de área.

Estos puntos son fáciles de medir en una muestra y a su vez están relacionados con los parámetros del modelo por las siguientes fórmulas:

$$A_A = 1 - \exp(-\lambda \bar{A})$$

$$L_A = \lambda(1 - A_A) \bar{U}$$

$$N_A^+ = \lambda(1 - A_A)$$

Hemos asumido que el grano típico se caracteriza por su área y contorno esperados. Cuando los granos son círculos, la variable estadística que debe averiguarse, o sea estimarse, es el radio, bien sea por medio del área o del contorno, haciendo uso de fórmulas triviales.

Dada una muestra cualquiera, las fórmulas nos permiten extraer de las

imágenes las estimaciones de los parámetros del modelo Booleano.

Además, se sabe que el estimador:

$$\hat{\lambda} = \frac{N_A^+}{1 - A_A}$$

para la intensidad, λ tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$A(W)^{\frac{1}{2}} (\hat{\lambda} - \lambda)$ posee distribución normal con media cero y varianza $\frac{\lambda}{1 - A_A}$

Este estimador debe ponerse a prueba porque aunque es consistente, no es insesgado. De igual manera, hemos desarrollado una aplicación a través de la cual, podemos leer algunos estadísticos de imágenes para hacer inferencias estadísticas, sobre los parámetros propios del modelo.

Es posible desarrollar aplicaciones en temas como bioingeniería, resistencia de materiales, geoinformática, medicina, control de calidad, etc., así como en el campo de la computación gráfica. Particularmente en algunos procesos de la industria textil, es posible estudiar el patrón de dispersión de defectos en la superficie de la tela, así como su intensidad, expresada como la tasa o número de defectos por unidad de área, denotada como λ . En éste problema tal vez sea viable asumir un patrón de puntos de Poisson, cuya presentación aparece en el marco teórico y que puede apreciarse gráficamente.

En nuestro proyecto estudiaremos imágenes tomadas en el control de calidad en la industria textil, con

PONENCIA 9. UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO. INGENIERÍA ELECTRÓNICA DIA MATLAB

miras a determinar si existe un patrón de dispersión e intensidad de los defectos. Exploraremos la validez estadística del modelo de Poisson y realizaremos estimaciones sobre su único parámetro poblacional, λ .

Aunque la trama de la tela es rectangular, los defectos se presentan como puntos infinitesimales, sin traza de la cuadrícula subyacente. Los modelos estadísticos paramétricos hacen posible detectar y separar la componente regular o sistemática de la componente puramente aleatoria, lo cual permite a la empresa tomar acciones correctivas cuya bondad debe reflejarse en la disminución de los valores de los parámetros de intensidad y de variabilidad en el modelo y por ende en la mejoría de la calidad de la tela.

Finalmente, nuestro componente computacional estacionado en la plataforma **MATLAB**, aparte de implementar todo lo relacionado con los aspectos estadísticos básicos, pasando por las distribuciones de probabilidad y el muestreo aleatorio, y culminando con el diseño integracional de los programas de simulación para las diferentes versiones del modelo Booleano. Adicionalmente, echamos mano de los recursos gráficos generales, así como lo necesario para las gráficas de distribución, rematando con el empleo de los recursos de

visualización interactiva. Desarrollamos todo lo relacionado con la generación y ejecución del modelo Booleano, plasmando las características y parámetros de los elementos en cuestión, expresados a través de una **interfaz gráfica de usuario (GUI)**, empleando la **herramienta de diseño del entorno (GUIDE)**, para estructurar un sistema interactivo, simple, ágil, ampliamente flexible y con gran envergadura de visualización.

* El profesor Jorge Orrego (magíster en matemáticas), pertenece al Departamento de Ing. Industrial de la Universidad de Antioquia (Medellín).

Celular: 300-7837200
E-Mail:
jorregog@yahoo.com

** Jairo Pertuz Campo, Físico, con estudios de maestría en Física. Instructor y asesor en MATLAB y sus herramientas especializadas. CO-Investigador y Docente Universitario por más de treinta años. Actualmente es Docente de la Universidad Abierta y a Distancia (UNAD-Medellín)

Celular: 301-4471036
E-Mail: jairopertuz@hotmail.com
pertuzjairo@yahoo.es