

Cuerpos de masa variable: Cohetes.

Primero A. Carlos Andrés Quintero, Segundo B. Julio Cesar Tabares

Facultad de Ingeniería Aeronáutica, U.P.B., MEDELLIN



ABSTRACT.

Se brindan los fundamentos teóricos referente al movimiento de los cohetes, partiendo de la segunda ley de Newton, la cual expresa la fuerza resultante como directamente proporcional al momentum lineal; nótese que la masa en éste caso es variable. ($\sum \text{Fuerzas} = d(m \cdot v)/dt$). Así mismo se da una breve introducción histórica para comprender su evolución y desarrollo.

PALABRAS CLAVES

Cohete: Aeronave que obtiene su empuje por la reacción de la expulsión rápida de gases de combustión desde un motor cohete

Leyes de movimiento de Newton: leyes que describen el movimiento de los cuerpos

Ecuación del cohete de Tsiolkovski: ecuación que recibe su nombre gracias al profesor de secundaria Konstantin Tsiolkovsky, quien fue el primero que la derivó, la cual es considerada como el principio de la cohetaría en general

Trayectoria: desplazamiento en el espacio (x,y,z) de acuerdo a las leyes del movimiento de Newton.

I. INTRODUCCION

El siguiente es un esfuerzo por dar mérito al trabajo de grandes mentes que a través de la historia han logrado idear y desarrollar un concepto que en tiempos anteriores eran inconcebibles, y a quienes pocas veces se da reconocimiento. Los cohetes en la actualidad son pilares del desarrollo tecnológico ya que nos permiten llegar a nuevos horizontes, y

Este trabajo fue realizado gracias al desarrollo conceptual de los libros guía de la signatura "Ingeniería de cohetes y Satélite", liderado por por el Ingeniero Mecánico Francisco G. Restrepo.

Carlos Andrés Quintero: Estudiante de Ingeniería Aeronáutica, E-mail: k_los874@hotmail.com.

Julio Cesar Tabares: Estudiante de Ingeniería Aeronáutica, E-mail: dj_julio21@hotmail.com.

adaptar lugares y espacios que tal vez algún día podremos conquistar. Es un campo tal vez restringido por los altos costos de manufactura e investigación, pero ha dado sentido y oportunidad al desarrollo de aeronaves, satélites, etc.

Es claro resaltar que gran parte y lamentablemente éste desarrollo, a sido producto de la invención militar en la carrera armamentista del ser humano por su necesidad de autodestrucción y belicismo.

El fundamento teórico del trabajo se encuentra en uno de los libros guías de la asignatura "ingeniería de cohetes y satélites" de la universidad Pontificia Bolivariana, el autor de dicho texto es el ingeniero mecánico Francisco G. Restrepo que junto al ingeniero Aeronáutico Felipe Correa fueron de gran ayuda en el entendimiento y desarrollo conceptual del modelo matemático que describe el movimiento del cohete en relación con el tiempo y la masa.

Dando un breve salto por los inicios de los cohetes, luego del descubrimiento de la pólvora por los alquimistas Chinos Taoistas, del cual se derivó la construcción de los primeros cohetes. Luego de dársele uso a estos como juegos pirotécnicos, se le acomodó para el uso militar como artillería. Luego de constantes evoluciones paramos en el siglo XX donde el profesor Konstantin Tsiolkovsky, quien realizó el primer trabajo científico serio sobre los vuelos espaciales. En este trabajo fue publicada la primer ecuación llamada "Ecuación del cohete de Tsiolkovski", la cual es considerada hasta la fecha como el principio de la Cohetería.

$$\Delta v = v_e \ln \frac{m_0}{m_1}$$

Donde m_0 es la masa total inicial, m_1 es la masa total final y v_e la velocidad de los gases de salida.

Con este principio será con el que derivaremos el lanzamiento de un cohete que sale de la tierra.

II. OBJETIVOS

Objetivos generales:

Plantear una rutina en Matlab a partir de la ecuación del cohete de Tsiolkovski, mostrando el despegue de un cohete el cual despegara desde una distancia inicial, y hará un consumo de combustible el cual tendrá una reducción con respecto al tiempo, así como también una velocidad la cual aumentará con respecto al tiempo

Objetivos específicos:

- Plantear una rutina muestre el movimiento que sigue un cohete al despegar de la tierra, a partir de una ecuación, la cual es obtenida mediante las leyes de newton.
- Analizar el comportamiento que tiene la velocidad y la masa con respecto a la variación del tiempo, y a su vez mirar que implica la reducción de la masa.
- Analizar la importancia que tiene el angulo de despegue que tiene el cohete y en que influye esto para un buen desempeño del cohete y del vuelo que este realizara
- Se desea conocer la velocidad que adquiere el cohete en cualquier instante de tiempo y la trayectoria que este recorre en el momento de despegar.
- Establecer que importancia tiene para el movimiento de los cohetes las leyes clásicas de la física.

III. FUNDAMENTACION MATEMATICA

Tomando las leyes de newton, con las cuales nos basaremos para la obtención de la ecuación, la cual nos describirá el movimiento que tiene un cohete al despegar de la tierra.

Análisis de fuerzas:

- F: Fuerza de empuje
 D: Drag (Resistencia del aire)
 W: Peso del cohete
 V: Velocidad del cohete

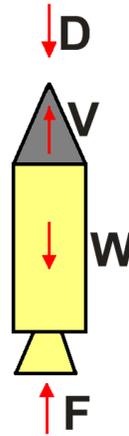


Fig. 1. Diagrama que muestra las fuerzas que actúan en un cohete

Con F, D y W en Libras; $F = m \cdot a \rightarrow W = m \cdot g$

Con m: Masa
 a: Aceleración
 $g = a = 32.2 \text{ Ft/seg}^2$

$$\sum \text{Fuerzas} = m \cdot a$$

$$F - D - mg = m \left(\frac{dV}{dt} \right)$$

Lo que quiere decir

$$\left[\frac{(F - D)}{m} \right] dt - g dt = dV$$

Al cabo de un tiempo: $0 \rightarrow t$, tenemos que

$$\int_0^t \left[\frac{(F - D)}{m} \right] dt - \int_0^t g dt = \int_{v_i}^{v_f} dv$$

Si decimos que

F: es aprox. Cte.
 D: $f(v, \rho, z)$ se asume D^0
 m: varía con consumo de combustible m^0
 mi: masa inicial
 $m = m_i - m^0 t$

$$\int_0^t \left[\frac{(F - D^0)}{(m_i - m^0 t)} \right] dt - \int_0^t g dt = \int_{v_i}^{v_f} dv$$

Lo que da:

$$\left[\frac{(F - D^0)}{m^0} \right] \ln \left[\frac{m_i}{(m_i - m^0 t)} \right] - g t = V - V_i$$

Y despejando V tenemos

$$dZ/dt = [(F - D^{\circ})/m^{\circ}] \ln[mi/(mi - m^{\circ} t)] - g t + Vi$$

Altura vertical alcanzada en fase propulsada

$$Z = (F - D^{\circ}/m^{\circ}) \left[\frac{(mi - m^{\circ} t)/m^{\circ}}{\ln(mi/(mi - m^{\circ} t)) + t} \right] - g(t^2)/2 + Vi t$$

Diciendo además que

$$mi = mp + me$$

Con:

mp: masa del combustible

me: masa de la estructura del cohete.

Me * Vi = 0 si despeja el suelo; Vi > 0 para aplicarlo a la segunda etapa.

El concepto de "Burnout" se refiere a la fase propulsada así que el tiempo de propulsión es igual a:

$$t_{bo} = m_p / m^{\circ}$$

Aplicando t_{bo} a V_{bo} y Z_{bo} se tiene:

$$V_{bo} = (F - D^{\circ}/m^{\circ}) \ln(mi / mi - mp) - (mp g / m^{\circ}) + Vi$$

$$Z_{bo} = (F - D^{\circ}/m^{\circ}) \left[\frac{(mi - mp)/mi}{\ln((mi - mp)/mi) + (mp/m^{\circ})} \right] - g(mp^2)/2 m^{\circ} + (Vi mp)/m^{\circ}$$

Después del "Burnout" el cohete sigue una trayectoria "Coasting", lo que dinámicamente significa:

Fuerza = Masa x Aceleración

Con

$$* \text{ Fuerza} = -g(mi - mp)$$

$$* \text{ Masa} = mi - mp$$

Por lo que tenemos

$$(mi - mp) dV/dt = -(mi - mp) g$$

$$\int_{t_{bo}}^{t_{maxz}} g dt = \int_{V_{bo}}^{V=0} dV$$

Para máxima altura z

$$M * V = 0$$

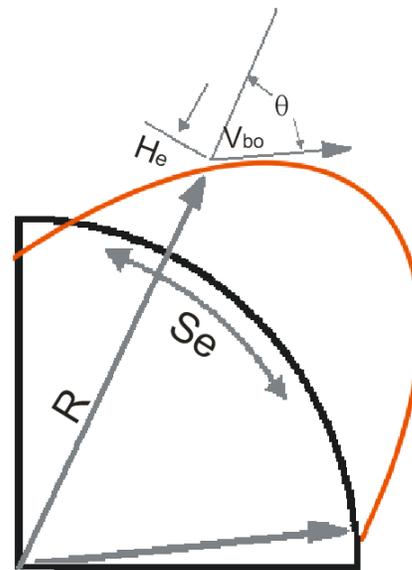
La altura Z máxima alcanzada = Z Propulsado + Z coasting.

$$Z_{max} = [V_{bo} + g (mp/m^{\circ}) - (g/2)(V_{bo}/g + mp/m^{\circ})] (V_{bo}/g) + Z_{bo}$$

$$Z_{max} = [(V_{bo}^2 / 2g) + Z_{bo}]$$

Trayectoria balística (Fuerzas de la atmósfera)

A. Trayectoria Balística de largo alcance



$$Re = 2.092 \times 10^7 \text{ fts}$$

Fig. 2. trayectoria balística de un cohete

En esta trayectoria se hace necesario variar la gravedad por la altura y dirección (Radial) que depende de un ángulo.

Si decimos que:

$$Se = 2Re [\sin(1 / ((2gRe)/V_{bo}^2 - 1))]]$$

Con:

Se: en millas náuticas

V_{bo} : Bismuth Velocity
 Θ : ángulo con vertical al bo
 $H_e = R - R_e$: Altura al bo.

B. Trayectoria Balística de corto alcance (Dentro de la atmósfera):

Es una trayectoria de corto alcance, lo que se conoce en la física como tiro balístico

Hipótesis del análisis de trayectoria y fuerza:

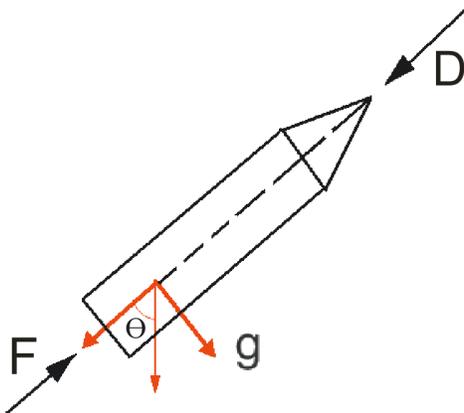


Fig. 3: Muestra el análisis en el eje del cohete

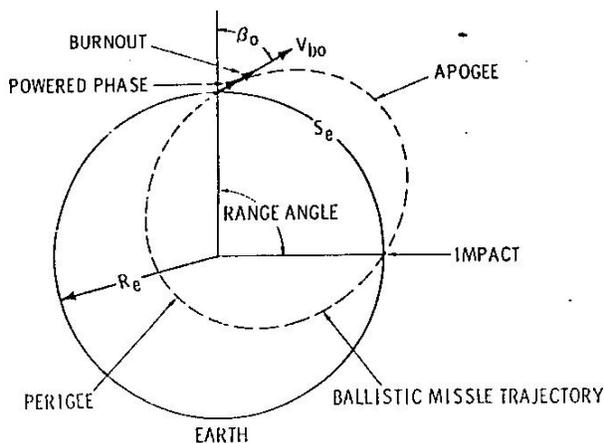


Fig. 4: Trayectoria de un misil con un vuelo elíptico.

where R_e is the mean radius of the earth.

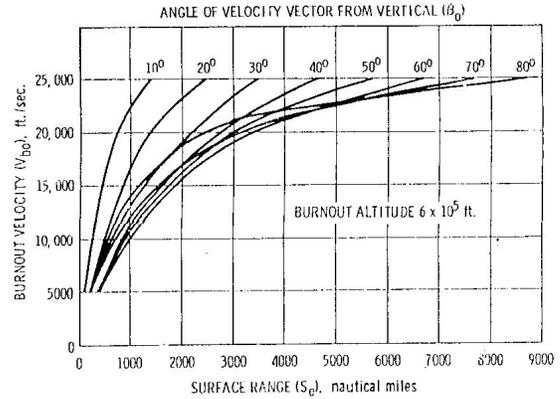


Fig. 5, análisis del rango con respecto a Burnout Velocity y el ángulo

a. Fase propulsada hasta burnout es lineal, con una inclinación Θ . Luego sigue el vuelo libre, en el tiro parabólico después del burnout.

b. Si la geometría es aerodinámica, es prácticamente D en troposfera ($C_D : 0.15-0.30$) para

$$D = (C_D \rho V_c^2 d^2)/2$$

Con D : diámetro del cohete, ρ = densidad decreciente del aire, V_c : Velocidad creciente

Analizando las fuerzas

\sum Fuerzas. = Masa x Aceleración, En dirección del eje del cohete,

$$F - D - M g \cos \Theta = \text{Masa} \times \text{Aceleración} = M \times A_c$$

ó

$$((F - D)/M) - g \cos \Theta = A_c = dV_o/dt$$

Pero $M = m^o - mt$

$$\int_0^{V_o} dV_o = \int_0^t ((F - D)/(m^o - mt)) dt - \int_0^t g \cos \Theta dt$$

V_c al cabo del tiempo t con una pérdida de combustible mt .

$$V_o = ((F - D)/m^o) \ln(m^o/m^o - mt) - (g \cos \Theta) t$$

La distancia recorrida durante el vuelo proporcionado en S_{bo} :

$$dS = V_o dt \text{ ó } \int_0^{S_{bo}} dS = \int_0^{t_{bo}} V_o dt$$

$$S_{bo} = [(F-D)/m^{\circ}](m_o - m_t) \text{Ln}((m_o - m_t)/m_o) + (g t^2 \text{Cos } \Theta)/2$$

Tiempo de vuelo propulsado

$$t_p = m_p/m^{\circ}$$

$$V_{c/burnout} = ((F - D)/m^{\circ}) \text{Ln}(m_o / m_o - m_t) - (g \text{Cos } \Theta)(m_p / m^{\circ})$$

Y con lo que obtenemos

$$S_{bo} = ((F-D)/m^{\circ 2})[(m_o - m_p) \text{Ln}((m_o - m_p)/m_o) + m_p] - (g(m_p/m^{\circ})^2 \text{Cos}\Theta) / 2$$

Fase del vuelo libre parabólico (Coasting):

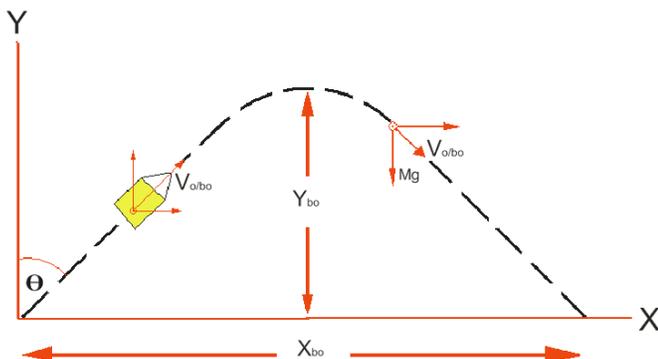


Fig. 6: diagrama de las fuerzas antes y después del Y_{max} .

SI usamos el Diagrama y La Σ Fuerzas tenemos:

$$-g M = Y'' \text{ y } \Theta = M X''$$

$V_{c/bo}$: Cte. Desde X_{bo} hasta X_{bo}

$$Y_{o \text{ Max}} = [V_{o/bo} \text{Cos } \Theta]^2 / 2g + S_{o/bo} \text{Cos}\Theta$$

$$X_{o \text{ Max}} = [V_{o/bo} \text{Cos } \Theta t] + S_{o/bo} \text{Sin}\Theta$$

Con

$$t = [V_{o/bo} \text{Cos } \Theta] / g + [(V_{o/bo} \text{Cos } \Theta / g)^2 + 2 S_{ob} \text{Cos } \Theta / g]^{(1/2)}$$

IV. ANÁLISIS DEL DESPEGUE DEL COHETE

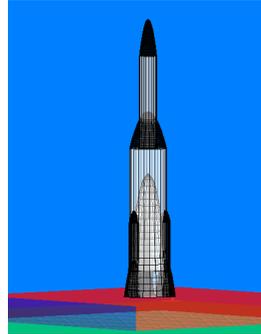


Fig. 7: Momento en el que se encuentra el cohete en reposo.

Aquí podemos ver el instante $t=0$, donde aun no a empezado el cohete su movimiento.

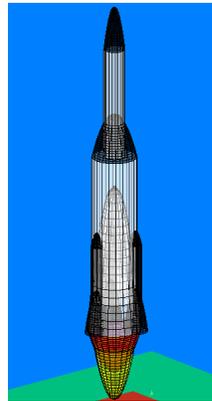


Fig. 8. instantes despides del despegue del cohete.

En este instante de tiempo el cohete se encuentra con una velocidad muy baja, ya que apenas empieza su vuelo y el combustible no ha disminuido notablemente.

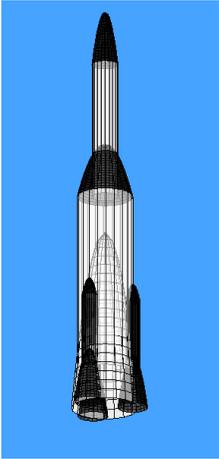


Fig. 9: Instante de tiempo donde el burnout llega a su máximo.

Luego de que el burnout o la fase propulsada llega a su fin, el cohete empieza una fase de vuelo libre, si el cohete se encuentra en el espacio, la velocidad será constante, pero si el cohete aun se encuentra bajo la influencia de la tierra, su velocidad comenzara a disminuir.

V. CONCLUSIONES.

- Analizando la ecuación de Tsiolkovski, observamos que el despegue del cohete es logarítmico, inferimos que conforme transcurre el tiempo la velocidad del cohete va aumentando. La razón de cambio de la masa esta dentro del operador logarítmico (\ln).
- A medida que transcurre el tiempo, la masa del cohete se agota, favoreciendo así, a un aumento de la velocidad cada vez mayor.
- Las leyes clásicas del movimiento (newton) son de gran aplicación en la dinámica de hoy en día, ya que modelan con precisión los fenómenos físicos que se dan cotidianamente en maquinas, mecanismos u otros objetos producto del ingenio humano.
- Existen principalmente cuatro tipos de trayectorias, estas son: vertical dentro de la atmósfera –como sounding rockets- , balísticas-parabólicas dentro y fuera de la atmósfera, y cónicas (circulares, elípticas, parabólicas e hiperbólicas) fuera de la atmósfera.

VI. REFERENCIAS PERSONALES.

Carlos Andrés Quintero:

Nació en el año 1987, en la ciudad de Medellín, en el año 1992 ingreso al Colegio Corazonista de Medellín, donde realizo todos sus estudios académicos escolares y de básica secundaria. Para el año 2004, luego de terminar sus estudios ingreso a la Universidad Pontificia Bolivariana al pregrado de

Ingeniería Aeronáutica. Actualmente se encuentra cursando el 4° semestre de esta carrera.

Julio Cesar Tabares:

Nació en el año 1988, en la ciudad de Medellín donde ha vivido toda su vida. Sus estudios escolares los realizo en la Escuela Sanvicente Ferrer. Desarrollo sus estudios secundarios en el Liceo Salazar y Herrera, para el 9° lo echaron por mala disciplina. Para 10° grado ingreso a la Institución Educativa Loma Hermosa, donde culmino sus estudios académicos. Para el año 2004 se inscribió en la carrera Ingeniería Aeronáutica, ofrecida por la Universidad Pontificia Bolivariana, para la fecha se encuentra en 4° semestre.

VII. REFERENCIAS.

- http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_del_cohete_de_Tsiolkovski.
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/cohete1/cohete1.htm>.
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/cohete3/cohete3.html>
- Libro guía “Ingeniería de Cohetes y Satélites”, por el Ingeniero Mecánico Francisco G. Restrepo, M. Sc, M. M.

E. y Dr. Ing. H.C.